ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

Jaime Escobar Acosta[1]

[1]Profesor Titular de la Universidad de Antioquía, Magister en Matemáticas de la Universidad Nacional, e-mail: jescobar@matematicas.udea.edu.co

AGRADECIMIENTOS

Más que un agradecimiento, este texto es un reconocimiento a los Profesores que en el año de 1988 y posteriores, se reunieron para conformar el Seminario permanente para el Estudio y la Enseñanza de la Geometría, coordinado por el Profesor Jaime Chica E.. Inicialmente fue formado por los Profesores Santiago Valencia, Ramiro Vargas Pino, Clara Mejía L., Alberto Jaramillo A., Luis García y Carlos A. Castaño. Posteriormente se conformó un segundo grupo de Profesores que trabajaron principalmente en los fundamentos de la Geometría, entre los cuales se cuentan los Profesores Alberto Jaramillo A., Clara Mejía L., Abelardo Espinal, Carlos Alberto Castaño, Jaime Chica E.. Más adelante los profesores Alberto Jaramillo y Carlos Castaño se encargaron de la compilación y redacción final del texto Notas de Geometría Euclidiana, como producto final del Seminario dirigido a la comunidad Académica de la Universidad de Antioquia. Así mismo el Profesor Alberto Jaramillo completó la producción de las Unidades de Circunferencia, Semejanza y Áreas, como también los Complementos de Ejercicios que apoyaban cada Unidad. El trabajo del profesor Jaramillo se ha dirigido a la Facultad de Ingeniería desde su publicación en el año 1992.

Mi experiencia en la enseñanza del curso basado en las notas de clase realizadas por los anteriores profesores, me condujo a mejorar la presentación, cambiar las demostraciones, ordenar algunas partes del curso, agregar más ejercicios, llenar algunos vacíos y agregar otros temas que no estaban en las notas realizadas por ellos.

También tengo que agradecer a los estudiantes de Física y Matemáticas, al Profesor Jairo Eloy Castellanos, que me animaron a escribir este texto, a la estudiante Eliana Muñoz Saráz quien con su paciencia y consejos me colaboró en la escritura de gran parte del texto en LATEX.

Prof. Jaime Escobar A.
Departamento de Matemáticas, U.deA.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. COMENTARIOS INICIALES

Un sistema axiomático es la forma acabada que toma hoy una teoría deductiva. Es un sistema donde todos los términos u objetos no definidos y las proposiciones no demostradas se enuncian explícitamente, siendo estas últimas, fijadas como hipótesis a partir de las cuales pueden construirse las demás proposiciones del sistema, siguiendo unas reglas lógicas perfecta y expresamente determinadas. El encadenamiento lógico que se hace a partir de las hipótesis, constituye la demostración. La necesidad de términos no definidos y proposiciones no demostradas se debe a que es imposible llevar la definición y la demostración indefinidamente.

Mediante la demostración, se establecen nuevas proposiciones o relaciones entre los objetos a partir de las relaciones dadas como axiomas; luego se hace necesario nombrar o definir los nuevos objetos que verifican estas propiedades; es así como la demostración y la definición corren de la mano.

Definición y demostración son en consecuencia, las dos operaciones fundamentales mediante las cuales se desarrolla una teoría deductiva.

Dentro del desarrollo axiomático griego, las nociones y principios se construían con fundamentación en el mundo exterior, es decir, se pretendía que los axiomas respondieran a la realidad y fueran así mismo auto-evidentes; este tipo de axiomáticas se han denominado genéticas o materiales, aquí los axiomas tienen un contenido y un sentido.

En la geometría desarrollada por Euclides, los términos primitivos como son: punto, recta, relaciones de incidencia, orden y congruencia tienen un contenido "material" e intuitivo evidente, sin embargo, en el desarrollo de su fundamentación se prescinde de este desarrollo material e intuitivo.

En oposición a la axiomática material, se estructura lo que se ha denominado un sistema axiomático formal, en el cual los elementos primitivos carecen en absoluto de contenido y son las piezas de un puro juego sin sentido material en sí mismo. El sentido viene definido implícitamente por las reglas del juego construídas por los axiomas y las reglas lógicas de demostración.

En un sistema formal, los axiomas no tienen características de auto-evidentes, son simplemente premisas, puntos de partida para el desarrollo de resultados posteriores. En este sentido, de las proposiciones que se concluyen de los axiomas por medio de reglas lógicas, diremos que son formalmente válidas, es decir, que existe una filiación lógica entre los axiomas y dichas conclusiones.

De otra manera, podemos entender la "verdad" matemática como una verdad implicada, donde el antecedente está constituído por los axiomas y el consecuente por las conclusiones.

En síntesis, una teoría deductiva bien estructurada, debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Enunciar explícitamente los términos primeros, con ayuda de los cuales se propone definir todos los otros.

2. Enunciar explícitamente las proposiciones primeras, con ayuda de las cuales se propone demostrar todas las demás. Estas proposiciones se denominan axiomas, la elección de estas proposiciones llamadas axiomas es en gran medida arbitraria, dependiendo en gran parte de los gustos del autor que esta desarrollando la teoría, en general el autor busca que sean simples y no demasiados numerosos.

Los axiomas deben verificar a su vez tres propiedades:

- **Consistencia:** se refiere a que no hallan dos teoremas deducibles a partir de los axiomas y sean contradictorios..
- **Suficiencia:** se refiere al hecho de que todo teorema sea deducible a partir de los axiomas y solo de ellos.
- **Independencia:** por razones de economía también es deseable que sean independientes, es decir, que ninguno de ellos sea deducibles de los otros.

Las dos primeras (consistencia y suficiencia) son imprescindibles en una teoría deductiva y la tercera (independencia) es deseable, es decir, la condición de independencia entre los axiomas, no es requisito indispensable en el desarrollo de una teoría axiomática, simplemente asegura que la teoría tenga el mínimo de supuestos teóricamente necesarios (axiomas). En la práctica, esta condición no se respeta, ya que no introduce contradicciones y permite agilizar el desarrollo de la teoría.

3. Que las relaciones establecidas entre los términos sean únicamente relaciones lógicas, permaneciendo independiente del sentido concreto que pueda darse a los términos.

4. Que en las demostraciones sólo intervengan estas relaciones, lo que prohibe "tomar prestado algo"a la consideración de las figuras.

1.2. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Hemos dicho que en matemáticas la verdad esta constituída como la validez de una implicación de la forma $H \Rightarrow T$, donde H es el conjunto de hipótesis y T la conclusión a la cual se desea llegar. Esta implicación, esta regida por un principio filosófico que establece que: "De la verdad no se puede seguir la falsedad". Este principio constituye la fundamentación del método de demostración denominado "directo", el cual consiste en partir de unas proposiciones que se admiten como ciertas, denominadas premisas y después llegar mediante una cadena de implicaciones lógicas, a una proposición final llamada conclusión o tésis.

Se puede establecer una equivalencia entre las proposiciones $H \Rightarrow T$ y $\neg T \Rightarrow \neg H$ llamada esta última, el contrarrecíproco de la proposición inicial. Este hecho permite establecer un método indirecto de demostración, denominado método de demostración por el contrarrecíproco. El método consiste en demostrar $\neg T \Rightarrow \neg H$, en lugar de $H \Rightarrow T$. La demostración de $\neg T \Rightarrow \neg H$ generalmente se hace usando el método directo, o sea, asumiendo la negación de la tesis ($\neg T$) para concluir la negación de la hipótesis ($\neg H$).
Se dice que dos proposiciones son contradictorias cuando una es la negación de la otra. Una contradicción, entonces, es la conjunción de una proposición y su negación ($Q \wedge \neg Q$), por tanto, una contradicción siempre será una proposición falsa.

Cuando en una demostración se establece una implicación de la forma $\neg P \Rightarrow Q \wedge \neg Q$, por el contrarrecíproco podemos establecer como válida la proposición $Q \vee \neg Q \Rightarrow P$. Esta implicación tiene como antecedente una proposición verdadera denominada tercero excluido y, por tanto, de dicha implicación se puede concluir que P es verdadera. Esta situación permite estructurar otro método de demostración indirecto llamado "Reducción al absurdo" ó "Método de contradicción". Para la aplicación del método se utilizan los siguientes pasos:

1. Introducir la negación de la conclusión deseada como una nueva premisa (axioma).
2. De esta nueva premisa, junto con las premisas dadas, deducir una contradicción.
3. Establecer la conclusión deseada como una inferencia lógica deducida de las premisas originales.

Este método es uno de los clásicos en las demostraciones matemáticas y en particular, en la Geometría frecuentemente se usa esta forma de razonamiento en la demostración de los teoremas.

CAPÍTULO 2

AXIOMAS DE INCIDENCIA Y ORDEN

En este capítulo, comenzaremos dando los términos y relaciones primitivas de la geometría, y su conexión por medio de los axiomas. A medida que se van presentando los axiomas, se deducen los teoremas que se desprenden de ellos, como también las definiciones necesarias para caracterizar los nuevos objetos.

En la formulación que adelantaremos, asumiremos el manejo de la lógica y de la teoría de conjuntos, aunque en algunos puntos haremos hincapié en el proceso lógico de las demostraciones.

2.1. ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

1.1 Términos primitivos: punto, recta, plano, espacio.

1.2 Relaciones primitivas: estar en (pertenencia), estar entre, congruente.
Estos términos y relaciones primitivas, se pueden relacionar mediante enunciados tales como:
El punto A está en la recta l.
El punto B esta entre los puntos A y C en la recta l.

1.3 Axiomas. Los axiomas se dividen en seis grupos a saber:
Grupo I. Axiomas de incidencia.
Grupo II. Axiomas de orden.
Grupo III. Axiomas de congruencia.
Grupo IV. Axiomas de continuidad.
Grupo V. Axiomas de paralelismo.
Grupo VI. Axiomas de área.

2.2. AXIOMAS DE INCIDENCIA

I.1 Dos puntos distintos determinan una recta y solo una a la cual pertenecen. Por un punto pasa al menos una recta.

I.2 A toda recta pertenecen al menos dos puntos distintos.

I.3 Dada una recta, existe al menos un punto del espacio que no está en la recta.

Definición 1. . Puntos colineales son aquellos que están en una misma recta.

I.4 Tres puntos distintos que no están en una misma recta, determinan un plano y solo uno al cual pertenecen. Por dos puntos distintos pasa al menos un plano.

I.5 A todo plano pertenecen al menos tres puntos distintos no colineales.

I.6 Dado un plano, existe por lo menos un punto del espacio que no está en el plano.

Definición 2. . Puntos coplanares son aquellos que están en un mismo plano.

I.7 Si dos puntos de una recta están en un plano, la recta está contenida en el plano.

I.8 Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

<u>Observación:</u> el axioma I.8 establece que si dos planos tienen un punto en común, tienen un segundo punto en común y en consecuencia, una recta común. <u>Notación</u>:

i) Para designar puntos, utilizaremos letras latinas mayúsculas.

ii) Para A, B puntos distintos, notaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ ó $\overleftrightarrow{BA}$ la recta a la cual pertenecen estos puntos, o también por letras minúsculas latinas.
Así, por ejemplo, nos referiremos a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ ó a la recta l , (ver Figura 1.).

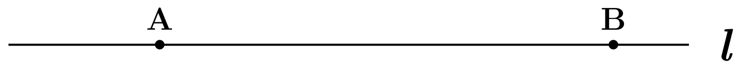


Figura 1.

Teorema 1.

Si dos rectas diferentes se intersectan, su intersección es un solo punto.

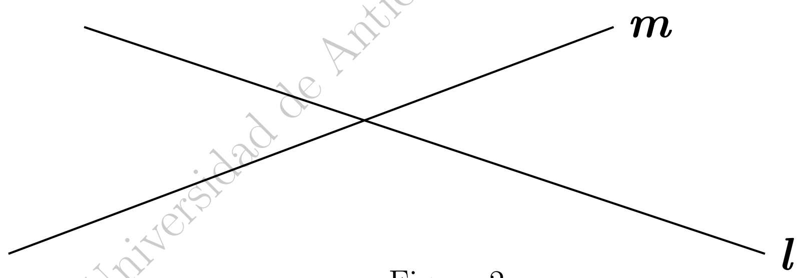


Figura 2.

Demostracion. (Figura 2.). Sean l y m dos rectas diferentes que se cortan. (Razonemos por reducción al absurdo). Supongamos que las rectas se cortan en dos puntos distintos A y B. Por el axioma I.1 por los puntos A y B pasa una recta única. Luego l y m son la misma recta. Contradicción, ya que l y m son rectas diferentes. ■

Teorema 2.

Si dos rectas diferentes se intersectan, existe un plano único que las contiene.

Demostracion. (Figura 3.). Sean l y m dos rectas diferentes que se intersectan. Sea A el punto de intersección **(Teorema 1)**. Por el axioma I.2 existen otro punto B diferente de A en l y otro punto C diferente de A en m. Luego A, B, C son no colineales ya que B no está en la recta m y C no está en la recta l. Entonces por el axioma I.4 A, B, C determinan un plano único. Por el axioma I.7 las rectas l y m están contenidas en ese plano. Este es el único plano que contiene a ambas. Si existiera otro, A, B y C estarían en él. Contradicción con el axioma I.4. ■

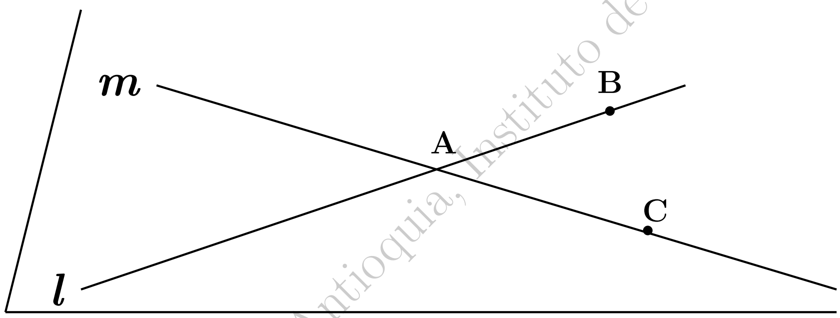


Figura 3.

Teorema 3.

Si l es una recta y A un punto que no pertenece a ella, existe un plano único que contiene a la recta y al punto.

Demostracion. (ver Figura 4.). Por el axioma I.2 la recta l tiene al menos dos puntos diferentes B y C. Por el axioma I.4 los tres puntos no colineales A, B y C determinan un plano único. A está en ese plano y por el axioma I.7 la recta l está contenida en el plano. Este plano es único, si no, los tres puntos A, B y C estarían en otro plano. Contradicción con el axioma I.4. ■

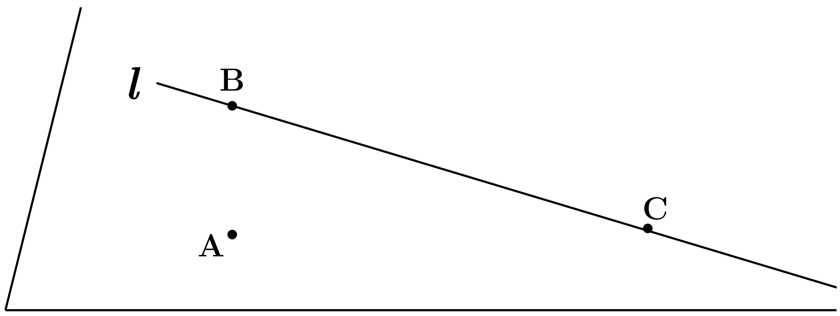


Figura 4.

2.3. AXIOMAS DE ORDEN

Intuitivamente en Geometría, el orden establece la forma como se relacionan tres puntos distintos pertenecientes a una misma recta, esta relación es la que hemos denominado dentro de las relaciones primitivas, "estar entre".

II.1 Si el punto B se encuentra entre el punto A y el punto C, entonces A, B y C son puntos diferentes de una misma recta y B se encuentra así mismo entre C y A, (ver Figura 5.).

Figura 5.

II.2 Dados dos puntos distintos A y C, existe al menos un punto B sobre $\overleftrightarrow{AC}$ tal que B está entre A y C, (ver Figura 6.).

II.3 Dados dos puntos distintos A y C, existe al menos un punto D sobre $\overleftrightarrow{AC}$, tal que C está entre A y D, (ver Figura 7.)

II.4 Dados tres puntos distintos de una recta, uno y solo uno de ellos está entre los otros dos.

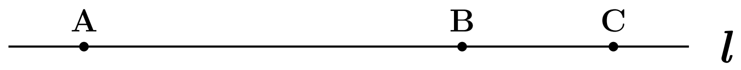


Figura 6.

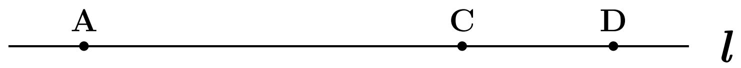


Figura 7.

<u>Observación</u>: el axioma II.4, establece que por ejemplo, si A está entre B y C, entonces B no está entre A y C y C no está entre A y B.

Definición 3 (Segmento). *Sean A y B dos puntos. Al conjunto formado por A y B y todos los puntos entre A y B se le llama segmento AB y se nota $\overline{AB}$ ó $\overline{BA}$.*
A y B se llaman extremos del segmento y se dice que ellos determinan al segmento. Los puntos que están entre A y B se llaman puntos interiores del segmento $\overline{AB}$. Los demás puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ se llaman puntos exteriores.

En consecuencia :

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X/X \quad \textit{es un punto que está entre} \quad A \quad y \quad B\}.$$

Los puntos interiores a $\overline{AB}$ los denotamos por $Int\overline{AB}$; por tanto

$$Int\overline{AB} = \{X/X \ \textit{es un punto que está entre } A \ y \ B\}.$$

Si A y B representan el mismo punto diremos que $\overline{AB}$ es un segmento nulo.

II.5 Si X está entre D y C y D está entre A y C, entonces X está entre A y C, (ver Figura 8.).

<u>Observación</u>: de II.2 y II.5 se sigue que un segmento tiene infinitos puntos y lo propio para una recta.

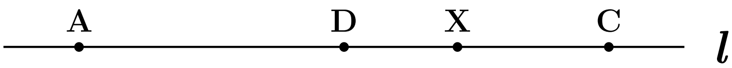


Figura 8.

Definición 4. *Un conjunto no vacío de puntos se denomina figura.*

Definición 5. *Diremos que una figura es convexa si dados dos puntos cualesquiera de ella, el segmento determinado por estos puntos, está contenido en la figura. En caso de no cumplirse este enunciado, diremos que la figura es no convexa, (ver Figuras 9. y 10.).*

Ejercicio 1. Si $A \equiv B$. Es $\overline{AB}$ convexo?
Ejercicio 2. Si $A \equiv B$. Es $Int\overline{AB}$ convexo?
Ejercicio 3. Demostrar que si $A \neq B$ entonces $\overline{AB}$ es convexo.

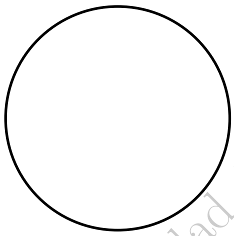


Figura 9. Figura Convexa

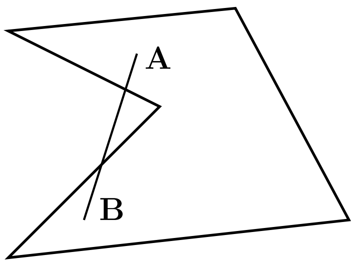


Figura 10. Figura no convexa

Teorema 4.

La intersección no vacía de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Demostración. Sean A y B conjuntos convexos.
Sean $X,\ Y \in\ A \cap B$, ya que $A \cap B \neq \emptyset$. Probemos que $\overline{XY} \subset A \cap B$.
En efecto, como $X,\ Y \in\ A \cap B$ entonces $X, Y \in A$ y $X, Y \in B$. Como A es convexo por hipótesis, entonces $\overline{XY} \subset A$ y similarmente, como B es convexo, entonces $\overline{XY} \subset B$, luego $\overline{XY} \subset A \cap B$. ■

Observación: la unión de dos conjuntos convexos, no necesariamente es un conjunto convexo. Veamos un contraejemplo.

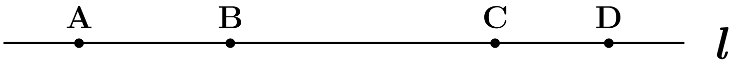


Figura 11.

Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos sobre una recta l; tales que:
$\overline{AB} \cap \overline{CD} = \phi$, (ver Figura 11.).
B, $C \in \overline{AB} \cup \overline{CD}$ y $\overline{BC} \not\subset \overline{AB} \cup \overline{CD}$
Luego, $\overline{AB} \cup \overline{CD}$ es no convexo.

Definición 6. *Sea O un punto de la recta l, A, B otros dos puntos diferentes de la misma. Si O no está entre A y B, diremos que los puntos A y B están sobre l a un mismo lado del punto O. Si O está entre A y B diremos que los puntos A y B están sobre la recta l en lados diferentes con respecto al punto O, (ver Figura 12.).*

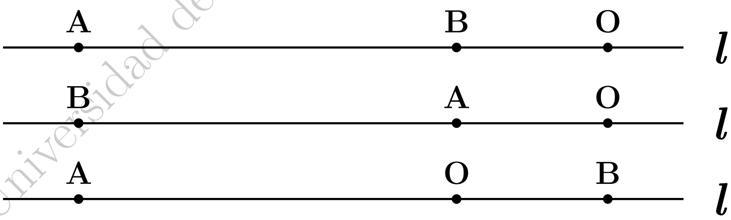


Figura 12.

II.6 Axioma de separación de la recta.

Un punto O de una recta l divide a todos los demás puntos de ésta en dos conjuntos no vacíos, de modo que dos puntos cualesquiera de l pertenecientes al mismo conjunto están a un mismo lado de O, mientras que dos puntos pertenecientes a distintos conjuntos se encuentran en lados diferentes de O.

Ilustración: (ver Figura 13.).

i) A, B están a un mismo lado de O. C, D están en un mismo lado de O.

ii) B, C están en lados diferentes de O. Lo propio para: A y C; A y D; B y D

iii) A y B pertenecen a un conjunto distinto al conjunto que contiene a C y D.

Figura 13.

Definición 7 (Semirrecta). *Decimos que un punto O de una recta l, conjuntamente con algún otro punto A de la misma, determina la semirrecta OA, que notaremos $\overrightarrow{OA}$; los puntos que están del mismo lado que A con respecto a O se llaman puntos de la semirrecta OA; el punto O, origen de la semirrecta OA, (ver Figura 14.).*

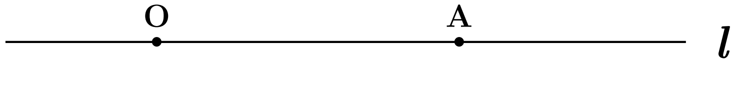


Figura 14.

En consecuencia:
$\overrightarrow{OA} = \{X/X$ es un punto que está entre O y $A\} \cup \{A\} \cup \{X/A$ es un punto que está entre O y $X\}$
Observaciones:

- El axioma II.6 nos permite, dada una recta l, O y A puntos distintos, establecer una partición de la recta en tres conjuntos convexos y disjuntos así: (ver Figura 15.)

$$l = \{O\} \cup \overrightarrow{OA} \cup \{X/O \quad \textit{está entre} \quad A \textit{ y } X\}$$

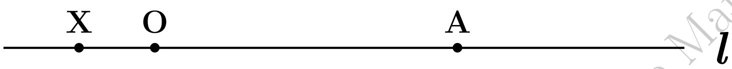


Figura 15.

- Si O, A, B son puntos de una recta y O está entre A y B diremos que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas,(ver Figura 16.).

Ejercicio 1. Mostrar que si $A-O-B$ entonces $\overrightarrow{OA} \bigcup \overrightarrow{OB}$ es no convexo.

II.7 Axioma de separación del plano.

Cada recta l contenida en un plano π, divide los puntos de este plano que no le pertenecen, en dos conjuntos no vacíos, de manera tal que dos puntos cualesquiera A y A' de conjuntos diferentes determinan un segmento $\overline{AA'}$, que contiene algún punto de la recta l, mientras que dos puntos arbitrarios A y A'' de un mismo conjunto determinan un segmento $\overline{AA''}$, dentro del cual no hay ningún punto de l, (ver Figura 17.)

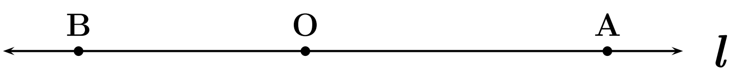


Figura 16.

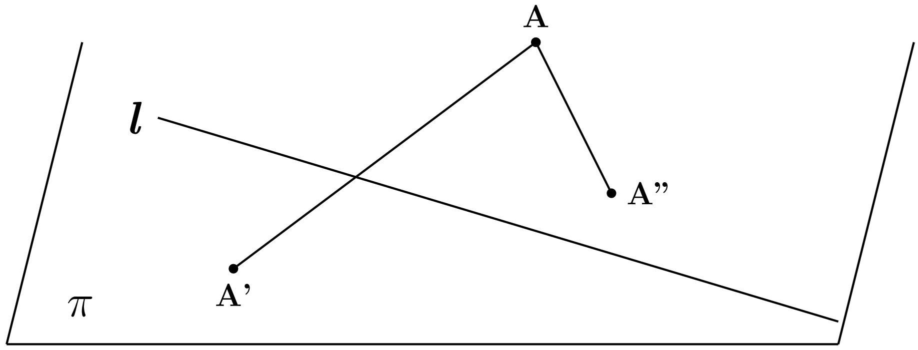


Figura 17.

Observaciones:

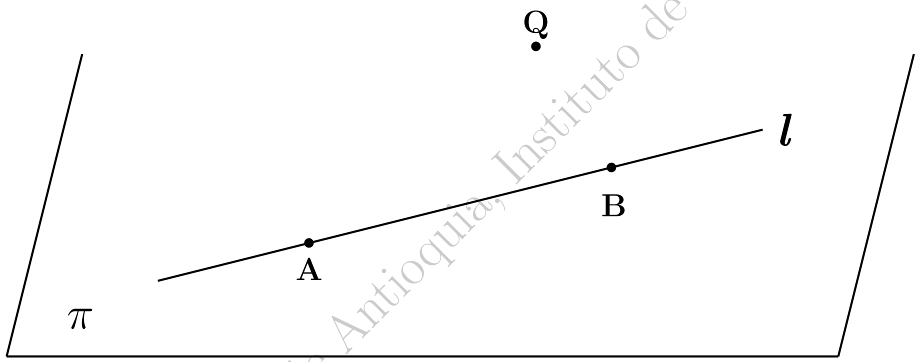


Figura 18.

i) Dados: $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$, $Q \in \pi$, $Q \notin \overleftrightarrow{AB}$, entonces el axioma II.7 nos permite definir dos conjuntos no vacíos que denominaremos <u>semiplanos</u> y que notaremos así: (ver Figura 18.)
$\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,Q}$ o $\overleftrightarrow{AB}\ /Q$ y que leeremos: semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$ y que contiene al punto Q.

$\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\neg Q}$ o $\overleftrightarrow{AB}\ /\neg Q$ y que leeremos: semiplano de borde $\overleftrightarrow{AB}$ y que no contiene al punto Q y se le llama semiplano opuesto al semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:Q}$

ii) Con las condiciones establecidas en i), el axioma II.7 nos permite establecer una partición del plano π en tres conjuntos convexos y disjuntos así:

$$\pi = \pi_{\overleftrightarrow{AB}:Q} \cup \overleftrightarrow{AB} \cup \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\neg Q} \quad \text{o} \quad \pi = \overleftrightarrow{AB}/Q \cup \overleftrightarrow{AB} \cup \overleftrightarrow{AB}\neg Q$$

Ejercicio 1. Mostrar que $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:Q}$ es convexo.
Ejercicio 2. Mostrar que $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:Q} \cup \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\neg Q}$ es no convexo.

Teorema 5.
Si P es un punto sobre una recta l y Q es un punto que no está en dicha recta, entonces la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ está contenida en $\pi_l : Q$.

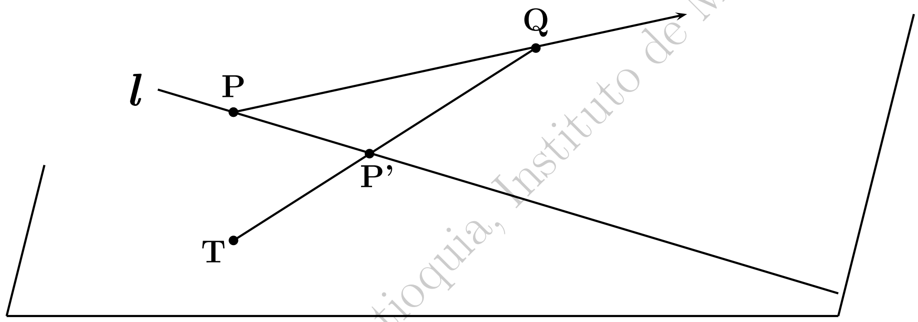


Figura 19.

Demostración. (Ver Figura 19.). Por el Teorema 3., sea π el plano determinado por l y Q y sea T un punto de la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ distinto de Q.
Claramente T es un punto del plano π.
Veamos que T está en el semiplano $\pi_l : Q$.
Razonando por reducción al absurdo: supongamos que T está en el semiplano $\pi_l : \neg Q$. Por consiguiente el segmento $\overline{TQ}$ intecepta la recta l en un punto P', luego P' está entre T y Q (Axioma de separación del plano) y como además T está en la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, entonces las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{TQ}$ coinciden y por lo tanto, P y P' son el mismo punto; de lo cual se sigue que P está entre T y Q, o sea que T no está en la semirrecta $\overrightarrow{PQ}$ en contradicción con el supuesto inicial. Lo anterior nos permite concluir que T está en el semiplano $\pi_l : Q$ como se quería demostrar. ■

II.8 Axioma de separación del espacio.

> Todo plano π divide a los demás puntos del espacio que no le pertenecen en dos conjuntos no vacíos, de manera tal que dos puntos cualesquiera A y B de conjuntos diferentes, determinan un segmento $\overline{AB}$ dentro del cual hay algún punto del plano π, mientras que dos puntos cualesquiera A y A' de un mismo conjunto, determinan un segmento $\overline{AA'}$ dentro del cual no hay puntos comunes con el plano π.

Observaciones:

i) Los conjuntos definidos por el axioma II.8 se denominan semiespacios.

ii) El axioma II.8 establece una partición del espacio en tres conjuntos convexos y disjuntos.

Definición 8. (Angulo). *El conjunto formado por dos semirrectas que tienen el mismo origen, incluyendo este punto, se llama ángulo. Si las dos semirrectas coinciden, entonces el ángulo que determinan se llama nulo. Si las dos semirrectas son semirrectas opuestas, el ángulo se llama llano.*

Ejercicio 1. Sea $\widehat{AOB}$ no nulo y no llano. Es $\widehat{AOB}$ convexo? Explique.

Notación: si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos semirrectas, entonces el ángulo que forman se denotará por cualquiera de los símbolos, (Ver Figura 20.):

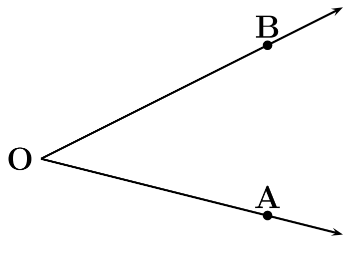


Figura 20.

$$\widehat{AOB} \quad ó \quad \widehat{BOA}; \measuredangle AOB \quad ó \quad \measuredangle BOA; \ \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad ó \quad \measuredangle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$$

$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se denominan lados del ángulo.
O se denomina vértice del ángulo.

Nota: cuando el ángulo $\widehat{AOB}$ es no nulo y no llano entonces los conjuntos $\alpha = \pi_{\overleftrightarrow{OA}:B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$, $\beta = \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\neg A}$ y $\widehat{AOB}$ forman una partición del plano π, es decir: $\alpha \cup \beta \cup \widehat{AOB} = \pi$ y $\alpha \cap \beta = \phi$, $\alpha \cap \widehat{AOB} = \phi$ y $\beta \cap \widehat{AOB} = \phi$. Veremos en la demostración del teorema siguiente que α y β son no vacios.

El siguiente teorema es consecuencia del Teorema 4.

Teorema 6.

Si el ángulo $\widehat{AOB}$ es no nulo y no llano entonces el conjunto $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$ es convexo y el conjunto $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\neg A}$ es cóncavo. (ver Figura 21.)

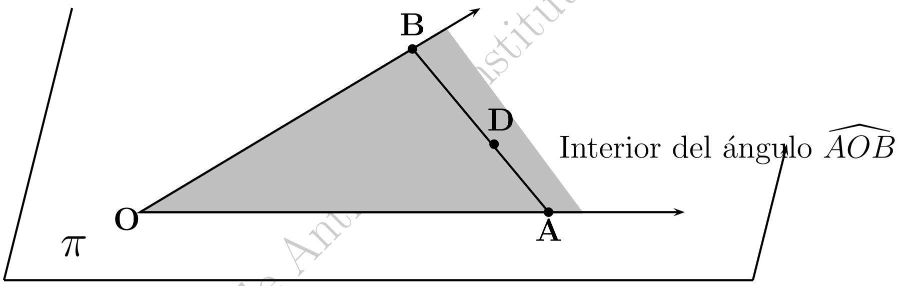


Figura 21.

Demostración: a) Veamos que $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$ es convexo, para hacer la demostración, utilicemos el **teorema 4.**, para ello debo demostrar que $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A} \neq \phi$. Sabemos que $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:B}$ y $\pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$ son convexos, como $\widehat{AOB}$ es no nulo y no llano entonces $A \neq B$, luego $\overline{AB}$ es no nulo y por tanto $Int\overline{AB} \neq \phi$. Sea $D \in Int\overline{AB}$, luego $A - D - B$, por tanto $D \notin \overleftrightarrow{OB}$ (ya que si $D \in \overleftrightarrow{OB}$ entonces $D \equiv B$, lo cual es absurdo, porque $A - D - B$), entonces por el **teorema** 5. $\overrightarrow{BA} \subset \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$ y como $D \in \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$ (ya que $A - D - B$)entonces $\pi_{\overleftrightarrow{OB}:A} \equiv \pi_{\overleftrightarrow{OB}:D}$ (*) y como por el **teorema** 5.: $\overrightarrow{OD} \subset \pi_{\overleftrightarrow{OB}:D}$ entonces por (*) $\overrightarrow{OD} \subset \pi_{\overleftrightarrow{OB}:A}$(1).

Similarmente (haciendo el mismo procedimiento) se demuestra que
$\overrightarrow{OD} \subset \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B}(2)$.

De (1) y (2) $\overrightarrow{OD} \subset \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$ luego $D \in \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$, es decir $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A} \neq \phi$ y por el **teorema 4.** $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$ es convexo.
b) $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,\neg A}$ es cóncavo (se deja como ejercicio). ■

Definición 9. Al conjunto $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$ del teorema anterior se le llama el interior del ángulo $\widehat{AOB}$ y lo denotamos así:$Int(\widehat{AOB}) = \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B} \bigcap \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$ y al conjunto $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,\neg A}$ se le llama el exterior del ángulo $\widehat{AOB}$ y lo denotamos así: $Ext(\widehat{AOB}) = \pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,\neg A}$

Corolario 1. *La semirrecta que tiene su origen en el vértice de un ángulo no nulo y no llano y un punto en el interior de dicho ángulo, está contenida en el interior del ángulo. (ver Figura 22.)*

Demostración: sea $D \in Int(\widehat{AOB})$. Veamos que la semirrecta $\overrightarrow{OD}$ está contenida en $Int(\widehat{AOB})$.
Está claro por la hipótesis que D es un punto del semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B}$ y también es un punto del semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$.
Por el **Teorema 5** la semirrecta $\overrightarrow{OD}$ está contenida en $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\,B}$ y también en $\pi_{\overleftrightarrow{OB}:\,A}$; esto es $\overrightarrow{OD}$ está contenida en $lnt(\widehat{AOB})$. ■

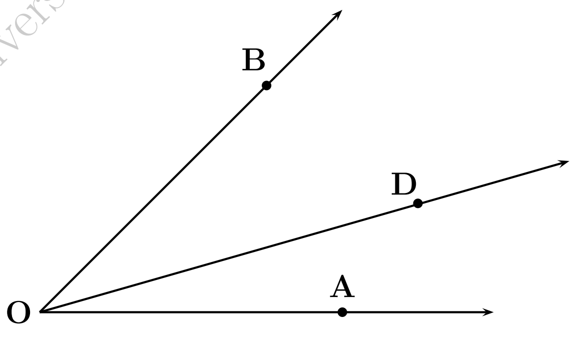


Figura 22.

Teorema 7.

Dado un ángulo $\widehat{BAC}$ (no-nulo y no llano), los puntos interiores del segmento $\overline{BC}$ están en el interior de dicho ángulo.

Demostración. (ver Figura 23.). Como ángulo $\widehat{BAC}$ es no-nulo y no llano entonces $B \neq C$, luego $\overline{BC}$ es no nulo. Sea D un punto interior de $\overline{CB}$. Vamos a demostrar que D es un punto interior al ángulo $\widehat{BAC}$.

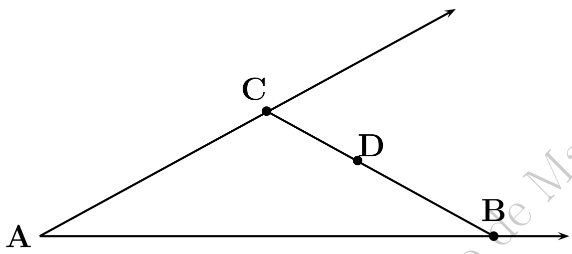


Figura 23.

De la hipótesis tenemos que D está entre B y C; por lo tanto, estos dos puntos están en lados distintos respecto a D y en consecuencia $C \notin \overline{BD}$. Afirmamos que $\overline{BD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \phi$, en efecto, puesto que $\overline{BD} \subset \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{C\}$ y como $C \notin \overline{BD}$, queda sustentado lo afirmado.
Por tanto: $\overline{BD} \subset \pi_{\overleftrightarrow{AC}:\, B}$ (1)

De la hipótesis también se infiere que $B \notin \overline{DC}$ y afirmamos que $\overline{DC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \phi$, en efecto, puesto que $\overline{DC} \subset \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{B\}$; pero $B \notin \overline{DC}$. En consecuencia:
$\overline{DC} \subset \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\, C}$ (2)

De (1) y (2) podemos concluir que $D \in \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\, C} \cap \pi_{\overleftrightarrow{AC}:\, B}$ esto es: D pertenece al interior del ángulo $\widehat{BAC}$. ∎

Teorema 8.

Sea $\widehat{BAC}$ un ángulo no nulo y no llano; D un punto interior a dicho ángulo. Si F es un punto tal que A está entre F y C, entonces los puntos B y F están en el mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{AD}$.

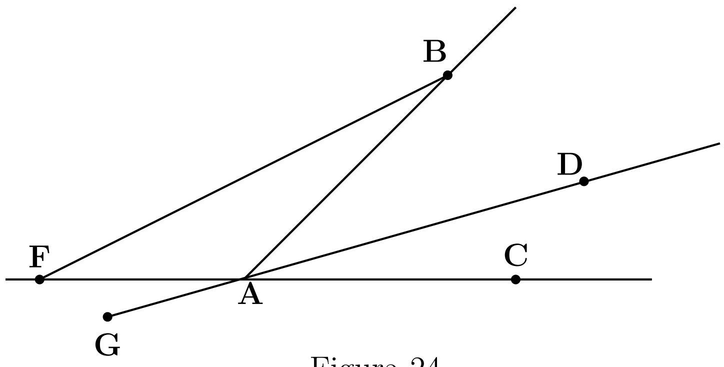


Figura 24.

Demostración. (Ver Figura 24.). Esta consistirá en demostrar que el segmento $\overline{BF}$ no tiene puntos en la recta en $\overleftrightarrow{AD}$. Dividiremos la prueba en tres puntos, a saber:

i) Veremos que el punto A no puede estar en el segmento $\overline{FB}$.

ii) Veremos que ningún punto de $\overline{FB}$ está en la semirrecta $\overrightarrow{AD}$.

iii) Veremos que ningún punto de $\overline{FB}$ está en la semirrecta $\overrightarrow{AG}$, siendo G un punto en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{AD}$.

La prueba de estas tres partes permite afirmar que $\overline{FB}$ no corta a la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y por tanto, que los puntos F y B están en un mismo semiplano respecto de la recta $\overleftrightarrow{AD}$.

Para probar i) comencemos por afirmar que la hipótesis del enunciado garantiza que A es un punto distinto de B y F.
Razonando por reducción al absurdo, supongamos que A es un punto en el interior de $\overline{FB}$. Puesto que F se tomó en la recta $\overleftrightarrow{AC}$, las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{FB}$ tienen en común los puntos A y F y por tanto dichas rectas coinciden (Axioma I.1), de donde se concluye que el punto B está en la recta $\overleftrightarrow{AC}$, lo cual lleva a la contradicción con la hipótesis de que el ángulo $\widehat{BAC}$ es no nulo y no llano. En esta forma queda demostrada la parte i).

Para probar las partes ii) y iii) se debe tener en cuenta que la semirrecta $\vec{AD}$ está contenida en el interior del ángulo $\widehat{BAC}$, (Corolario) y por tanto, está contenida en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,C}$ como también en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,B}$.

Para probar ii) afirmamos que los puntos F y C están en semiplanos opuestos respecto a la recta $\overleftrightarrow{AB}$, ya que A está entre F y C y estos puntos no están en $\overleftrightarrow{AB}$. Según lo anterior, F está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,\neg C}$ y por el **Teorema 5**, es claro que la semirrecta $\overrightarrow{BF}$ está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,\neg C}$. Por otra parte, ya se afirmó que la semirrecta $\overrightarrow{AD}$ está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,C}$. Siendo disjuntos los semiplanos $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,\neg C}$ y $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\,C}$ y siendo $B \neq A$, se sigue que ningún punto de $\overline{FB}$ está en la semirrecta $\overrightarrow{AD}$.

Para demostrar la parte iii) tomamos en consideración que las semirrectas opuestas $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ están en semiplanos opuestos respecto a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y como $\overrightarrow{AD}$ está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,B}$, entonces $\overrightarrow{AG}$ está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,\neg B}$. Por otra parte, como F está en $\overleftrightarrow{AC}$ y B es un punto que no está en $\overleftrightarrow{AC}$, por el **Teorema 5**, se sigue que la semirrecta $\overrightarrow{FB}$ está en el semiplano $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,B}$. Siendo disjuntos los semiplanos $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,\neg B}$ y $\pi_{\overleftrightarrow{AC}:\,B}$ y siendo $B \neq A$, se concluye que el segmento $\overline{FB}$ no tiene puntos en la semirrecta $\overrightarrow{AG}$. ■

Corolario 2. *Sea $\widehat{BAC}$ un ángulo no nulo y no llano; D un punto en el interior de dicho ángulo. Si F es un punto tal que A esta entre F y C, entonces $\overrightarrow{AB} \subset Int\widehat{FAD}$.*

Teorema 9 (Teorema de la barra transversal).

Si D es un punto que está en el interior de $\widehat{BAC}$ (no nulo y no llano), entonces $\overrightarrow{AD}$ intersecta a $\overline{BC}$.

Demostración. (ver Figura 25.). Razonando por reducción al absurdo. Supongamos que $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \phi$. Sea $\overrightarrow{AG}$ la semirrecta opuesta a la semirrecta $\overrightarrow{AD}$, como $\overrightarrow{AD} \subset Int\widehat{CAB}$ (por **Corolario 1.**) y $Int\overline{BC} \subset Int\widehat{CAB}$ (por **Teorema 7.**), entonces $\overrightarrow{AG} \cap \overline{BC} = \phi$ y $A \notin \overline{BC}$ (ya que el $\widehat{CAB}$ es no nulo y no llano) en consecuencia $\overleftrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \phi$ y por tanto B y C están en

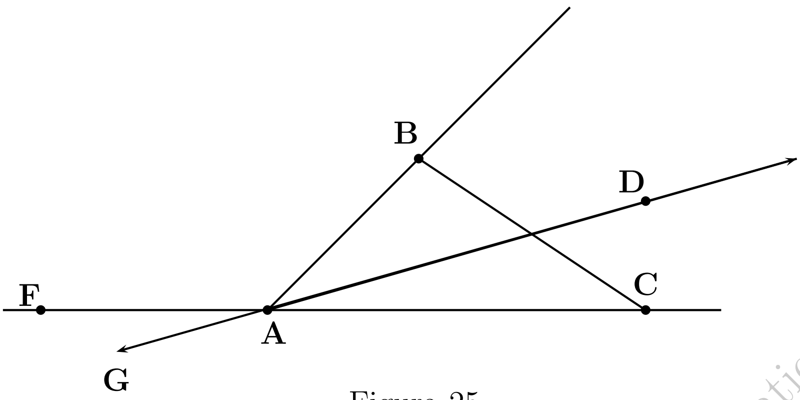


Figura 25.

el mismo semiplano con respecto a la recta $\overleftrightarrow{AD}$ (Axioma de separación del plano). Tomemos $F \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que A está entre F y C, por tanto $\overline{FB} \cap \overleftrightarrow{AD} = \phi$ (por **Teorema 8**); esto es, F y B están en el mismo semiplano respecto a la recta $\overleftrightarrow{AD}$, concluyéndose por tanto que F y C están en el mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{AD}$; esto es contradictorio puesto que A está entre F y C.
Conclusión: $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \phi$. $\blacksquare$

2.4. Ejercicios y Problemas del Capít. 2.

1. Con este ejercicio se demuestra que un segmento es una figura convexa. Si los puntos C y D pertenecen al segmento $\overline{AB}$, entonces todos los puntos del segmento $\overline{CD}$ están en el segmento $\overline{AB}$ ($\overline{CD} \subset \overline{AB}$).

2. Si el punto C esta entre los puntos A y B, todos los puntos del segmento $\overline{AC}$ están en el segmento $\overline{AB}$.

3. Si el punto C esta entre los puntos A y B, ningún punto del segmento $\overline{AC}$ distinto de C esta en el segmento $\overline{CB}$.

4. Si el punto C esta entre los puntos A y B, cada punto del segmento $\overline{AB}$, esta o bien en el segmento $\overline{AC}$ o bien en el segmento $\overline{CB}$ o en ambos.

5. Si A, B, C no están en la misma recta y si una recta a intercepta el interior de dos de los tres segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$, entonces la recta a no intercepta el tercero.

6. Si M es un punto de $\overrightarrow{OA}$, demostrar que $\overrightarrow{OM}$ coincide con $\overrightarrow{OA}$.

7. Si Q es un punto del semiplano $\prod_{l:P}$, demostrar que $\prod_{l:Q}$ coincide con $\prod_{l:P}$.

8. Demostrar que si un plano y una recta se cortan y el plano no contiene la recta, entonces se cortan en un solo punto.

9. Demostrar que la recta es una figura convexa.

10. Demostrar que un segmento y una recta tienen un número infinito de puntos.

11. Sea α un plano cualquiera, l una recta contenida en el plano α. Demostrar que existe al menos un punto en el plano α que no está en la recta l.

12. Demostrar el corolario 2.

13. Demostrar que si el ángulo $\widehat{AOB}$ es no nulo y no llano entonces el conjunto $\pi_{\overleftrightarrow{OA}:\neg B} \bigcup \pi_{\overleftrightarrow{OB}:\neg A}$ es cóncavo.

CAPÍTULO 3

AXIOMAS DE CONGRUENCIA

3.1. LA RELACION DE CONGRUENCIA

Cuando se piensa en la forma y tamaño de las figuras geométricas, surge de un modo natural la posibilidad de que dos o más figuras coincidan.
El paso siguiente de nuestro trabajo, consiste en establecer una relación que incluye esta posibilidad en el tratamiento geométrico.
Vamos a denominar congruencia a esta nueva relación. Será suficiente establecer sin definición dicha relación para segmentos y ángulos, y después extenderla mediante definiciones para otras figuras u objetos geométricos.
En adelante podremos hacer afirmaciones como: $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, o bien, $\widehat{ABC}$ es congruente con $\widehat{DEF}$.
La relación de congruencia será denotada por el signo primitivo $\cong$ y así las anteriores afirmaciones se podrán escribir:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},\ \ \widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$$

3.2. AXIOMAS DE CONGRUENCIA

III.1 Axioma de la construcción del segmento

Sea $\overline{AB}$ un segmento cualquiera no nulo y $\overrightarrow{CE}$ una semirrecta de origen C. Entonces existe en $\overrightarrow{CE}$ un único punto D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ver Figura 1.).

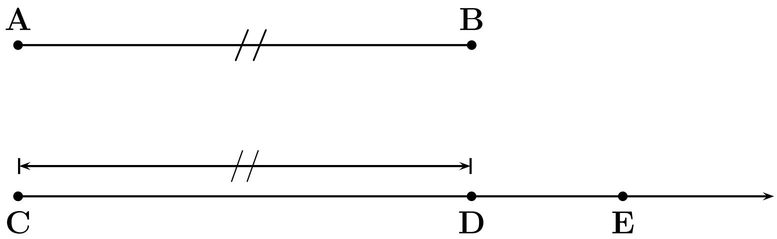


Figura 1.

En términos prácticos, este axioma afirma la posibilidad de construir o trasladar un segmento haciendo uso, por ejemplo, de regla y compás.

Las construcciones geométricas se hacen con regla y compás, el compás sirve para trasladar la magnitud del segmento y la regla (sin numeración) para trazar rectas.

Construcción básica: construir con regla y compás un segmento en una semirrecta dada $\overrightarrow{OX}$, dado el segmento $\overline{AB}$.

Figura 2.

Construcción. (Ver Figura 2.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en O y radio $\overline{AB}$ trazo arco, que corta a $\overrightarrow{OX}$ en C .
- El segmento $\overline{OC}$ es el segmento pedido.

Justificación. Esta construcción es consecuencia inmediata del Axioma de construcción de segmento.

III.2 i) Propiedad reflexiva: cada segmento es congruente consigo mismo, es decir: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ para todo segmento $\overline{AB}$.

ii) Propiedad de simetría: si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

iii) Propiedad transitiva: si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces

$$\overline{AB} \cong \overline{EF}.$$

III.3 Sean A, B, C puntos de una recta a y A', B', C' puntos de a ó de otra recta b, tales que B está entre A y C y B' entre A' y C'.

i) Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

ii) Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

(ver Figura 3.)
El anterior axioma expresa que la "suma" y la "diferencia" de segmentos congruentes, producen segmentos congruentes.

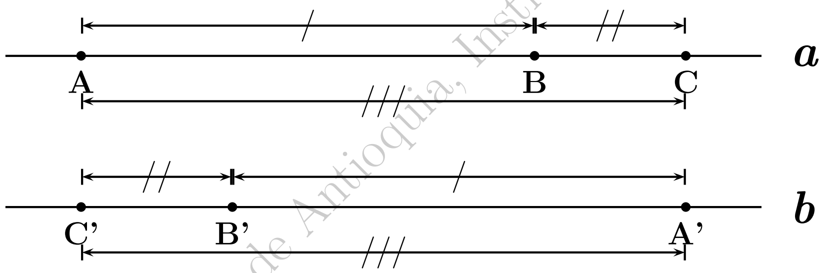


Figura 3.

III.4 Axioma de la construcción del ángulo

Sea $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ un ángulo cualquiera y O' un punto de una recta l situada en un plano π.
Sea π_l uno cualquiera de los semiplanos en que l divide a π y $\overrightarrow{O'C'}$ una de las semirrectas en que O' divide a l. Entonces existe una semirrecta única $\overrightarrow{O'D}$ situada en el conjunto $\pi_l \cup l$ tal que:

$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'C'}, \overrightarrow{O'D})$$

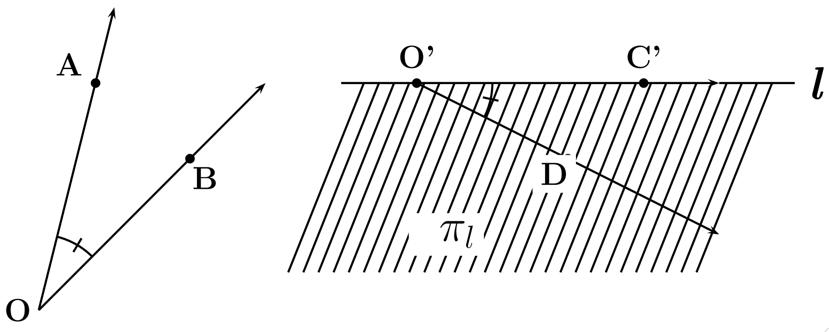


Figura 4.

(ver Figura 4.)

Igual que en III.1, este axioma afirma la posibilidad de construir o trasladar un ángulo haciendo uso por ejemplo, del compás y la regla, esta construcción la haremos más adelante.

III.5 El siguiente axioma expresa que la relación de congruencia entre ángulos verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, en términos similares a los del axioma III.2, es decir:

i) Reflexiva: $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

ii) Simétrica: si
$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'X}, \overrightarrow{O'Y}),$$
entonces
$$\measuredangle(\overrightarrow{O'X}, \overrightarrow{O'Y}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

iii) Transitiva:
si $\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{UC}, \overrightarrow{UD})$ y $\measuredangle(\overrightarrow{UC}, \overrightarrow{UD}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{WX}, \overrightarrow{WY})$, entonces
$$\measuredangle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{WX}, \overrightarrow{WY})$$

III.6 Sean $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}$ semirrectas con un mismo origen O y situadas en un mismo plano α.

Sean $\overrightarrow{O'R}$, $\overrightarrow{O'S}$, $\overrightarrow{O'T}$ semirrectas con un mismo origen O' y situadas en α ó en otro plano α'.
Supongamos además que $\overrightarrow{OL}$ está en el interior de $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK})$ y $\overrightarrow{O'T}$ en el interior de $\measuredangle(\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'S})$ (ver Figura 5.). Entonces:

i) Si $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OL}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'T})$ y $\measuredangle(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'T}, \overrightarrow{O'S})$, entonces $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'S})$

ii) Si $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OL}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'T})$ y $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'R}, \overrightarrow{O'S})$, entonces $\measuredangle(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'T}, \overrightarrow{O'S})$

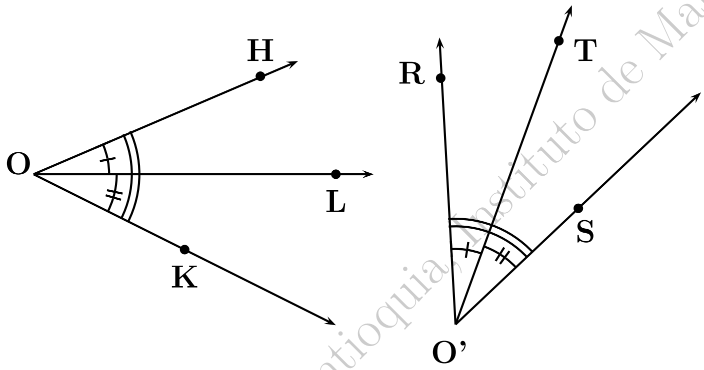


Figura 5.

Este axioma, lo mismo que el III.3, expresa que lo "suma" y la "diferencia" de ángulos congruentes, dan como "resultado", ángulos congruentes.

Corolario 3. *Todos los ángulos llanos son congruentes.*

Demostración. (ver Figura 6.). Supongamos que $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ son ángulos llanos, veamos que son congruentes. En efecto, por el axioma de construcción de ángulo, existe una semirrecta $\overrightarrow{OX}$ contenida en el semiplano $\pi_l \cup l$ tal que $\widehat{AOX} \cong \widehat{A'O'B'}$, como $\widehat{A'O'B'}$ es llano por hipótesis, entonces $\widehat{AOX}$ también es llano y por tanto, $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OA}$ son semirectas opuestas,

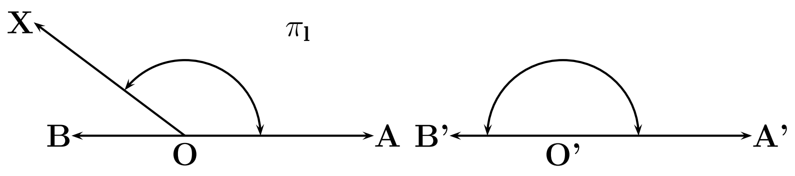


Figura 6.

pero como por hipótesis $\widehat{AOB}$ es llano, entonces $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas y por el axioma de separación de la recta $\overrightarrow{OX} \equiv \overrightarrow{OB}$, luego $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$ ■

Definición 10 (Triángulo). *Sean A, B, C, tres puntos distintos no colineales. La unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ determinan el triángulo de vértices A, B y C que denotaremos: $\triangle ABC$ ó $A\overset{\triangle}{B}C$.*

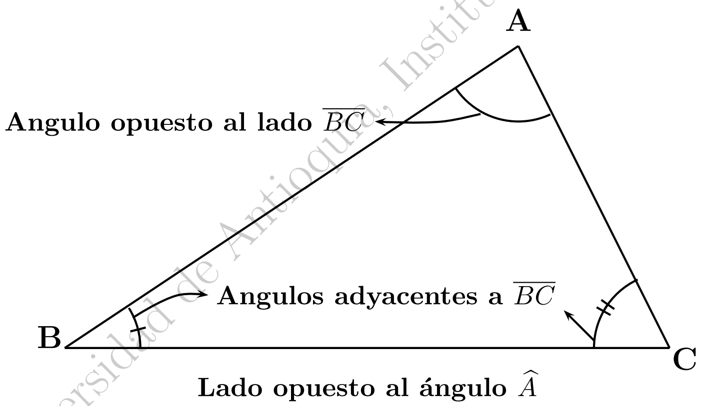


Figura 7.

Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman lados del triángulo. Los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ y $\widehat{ACB}$ se llaman ángulos interiores o simplemente ángulos del triángulo $\triangle ABC$ y también, si no hay ambiguedad, serán denotados por sus vértices, o sea, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$.
El interior del triángulo esta definido por
$Int\triangle ABC = \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\, C} \cap \pi_{\overleftrightarrow{AC}:\, B} \cap \pi_{\overleftrightarrow{BC}:\, A}$

En un triángulo $\triangle ABC$, diremos que $\widehat{A}$ es el ángulo opuesto al lado $\overline{BC}$ y $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son ángulos adyacentes a dicho lado. Recíprocamente, $\overline{BC}$ se llama lado opuesto al ángulo $\widehat{A}$ y el mismo lado $\overline{BC}$ se llama lado adyacente tanto a $\widehat{B}$ como a $\widehat{C}$, (ver Figura 7.).

Esta misma terminología es aplicable a los otros ángulos y lados del triángulo.

Ejercicio 1. Es $\triangle ABC$ una figura convexa?
Ejercicio 2. Mostrar que $Int\triangle ABC$ es convexo.

Definición 11 (Congruencia de triángulos). *(Ver Figura 8.). El triángulo $\triangle ABC$ es congruente al triángulo $\triangle A'B'C'$ si:*

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'},\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$
$$\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'},\ \widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'},\ \widehat{BCA} \cong \widehat{B'C'A'}$$

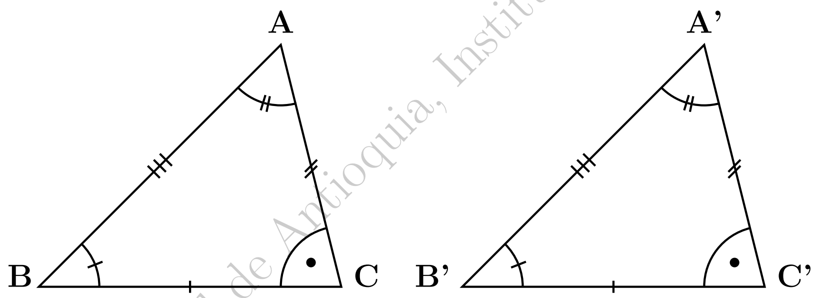


Figura 8.

En este caso decimos que los vértices A y A', B y B', C y C', los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ y los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{B'}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$ son homólogos o correspondientes.

Escritura simbólica: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

La definición anterior establece que dos triángulos son congruentes si tanto los lados como los ángulos se presentan en pares congruentes.

El siguiente axioma establece condiciones mínimas para la congruencia de dos triángulos y se denomina axioma LADO-ÁNGULO-LADO, en símbolos: L-A-L.

III.7 Axioma L-A-L
Si los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ presentan las congruencias:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'},\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{y} \quad \widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'},$$

entonces (ver Figura 9.)

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

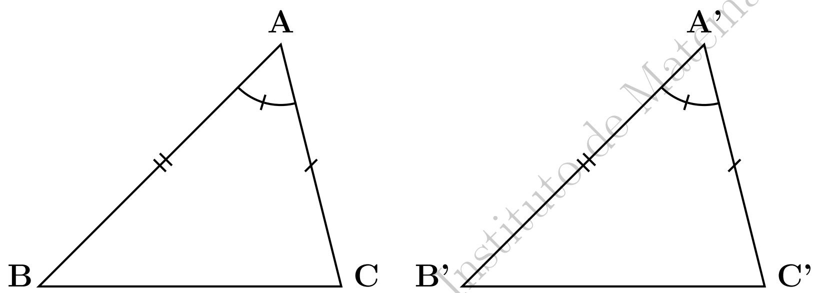


Figura 9.

Según el axioma L-A-L, dos triángulos son congruentes si en uno de ellos existen dos lados y el ángulo comprendido (entre dichos lados), respectivamente congruentes a dos lados y el ángulo comprendido (entre dichos lados), en el otro triángulo.
Los siguientes dos teoremas establecen que la relación de congruencia entre segmentos (respectivamente entre ángulos), mantiene la disposición de los puntos en una recta (respectivamente, la disposición de las semirrectas que tienen el origen en el vértice de un ángulo).

Teorema 10.
Sean A, B, C tres puntos de una recta $\underline{a}$ y A', B', C' tres puntos de una recta $\underline{b}$ tales que, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$.
Si B está entre A y C y B' está del mismo lado que C' con respecto a A', (ver Figura 10.), entonces B' está entre A' y C'.

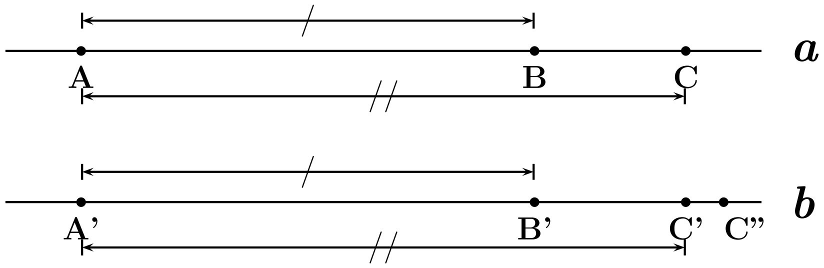


Figura 10.

Demostración: por el axioma de construcción del segmento, existe un punto C'' en b tal que B' está entre A' y C'' y además $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$, (ver Figura 10.). El teorema quedará demostrado si se logra probar que C'' coincide con C'.
De las congruencias: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C''}$
se obtiene $\overline{AC} \cong \overline{A'C''}$ ("Suma"de segmentos), y como $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ (hipótesis), se concluye $\overline{A'C'} \cong \overline{A'C''}$ (transitividad). De donde se sigue, como una consecuencia del axioma de construcción del segmento, que C' y C'' coinciden, pues están en la recta b y del mismo lado de A'. Ya que C'' se tomó de modo que B' está entre A' y C'', se concluye que B' está entre A' y C', como se quería demostrar. ■

Tiene lugar un teorema, análogo al anterior, para ángulos.

Teorema 11.

Supongamos que en cierto plano fijo se tienen las semirrectas $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{OK}$ y $\overrightarrow{OL}$ y que en el mismo plano o en otro cualquiera, se tienen las semirrectas $\overrightarrow{O'H'}$, $\overrightarrow{O'K'}$ y $\overrightarrow{O'L'}$. Supongamos además que las semirrectas $\overrightarrow{OK}$ y $\overrightarrow{OL}$ están en el mismo semiplano determinado por la recta $\overleftrightarrow{OH}$ y que las semirrectos $\overrightarrow{O'K'}$, $\overrightarrow{O'L'}$ tienen disposición análoga con respecto a $\overleftrightarrow{O'H'}$. Entonces, si $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'H'}, \overrightarrow{O'K'})$,
$\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OL}) \cong \measuredangle(\overrightarrow{O'H'}, \overrightarrow{O'L'})$,

Si la semirrecta $\overrightarrow{OK}$ está en el interior de $\measuredangle(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OL})$, (Ver Figura 11.), la semirrecta $\overrightarrow{O'K'}$ estará también en el interior de $\measuredangle(\overrightarrow{O'H'}, \overrightarrow{O'L'})$.

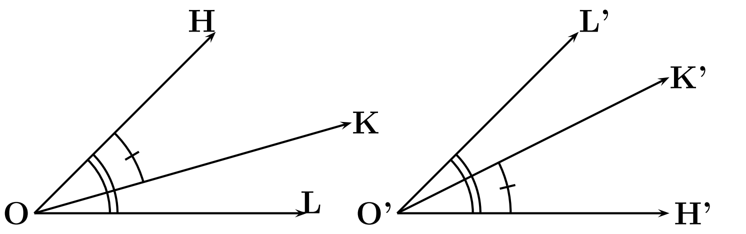


Figura 11.

Teorema 12 (Caso ángulo-lado-ángulo: A-L-A).

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos tales que:
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{CBA} \cong \widehat{C'B'A'}$ *Entonces*

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

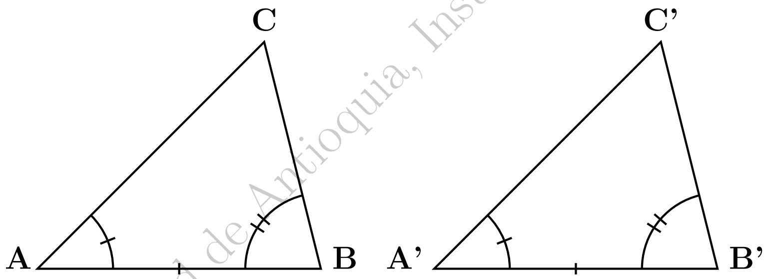


Figura 12.

Demostración. (Ver Figura 12.).Esta consistirá en demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ con lo cual se tiene $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$(por el ax. L-A-L).
Sea D un punto en la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ tal que: $\overline{AD} \cong \overline{A'C'}$ (axioma de construcción de segmento).
Por tanto, $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ (axioma L-A-L), (ver Figura 13.).

Luego $\widehat{DBA} \cong \widehat{C'B'A'}$ y como $\widehat{CBA} \cong \widehat{C'B'A'}$, (hipótesis), se tiene por transitividad, $\widehat{DBA} \cong \widehat{CBA}$ por tanto (por el Ax. de construcción de ángulo) $\overrightarrow{BC} \equiv \overrightarrow{BD}$ luego (por Teorema 1.) $C \equiv D$; luego $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ ■

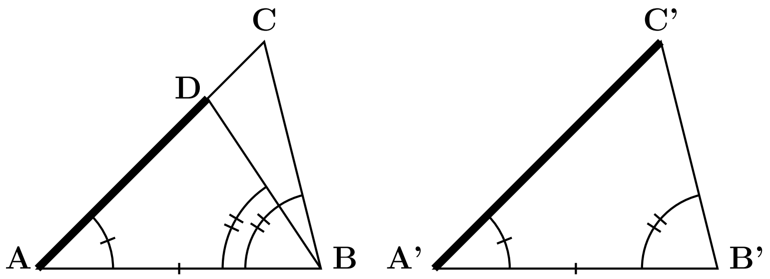


Figura 13.

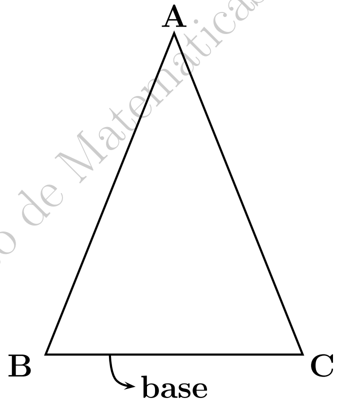


Figura 14.

Definición 12. i) Se llama triángulo isósceles a aquel que tiene dos lados congruentes, (Ver Figura 14.).

ii) Si el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, se llama base del triángulo al tercer lado $\overline{BC}$.

Teorema 13.
En todo triángulo isósceles, los ángulos adyacentes a la base son congruentes.

Demostración: sea $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Veamos que los ángulos de la base, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son congruentes.

Sean D y E puntos tales que B está entre A y D, C entre A y E y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$, (ver Figura 15.).

Por suma de segmentos, $\overline{AE} \cong \overline{AD}$.
Entonces en los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ se tiene:

$$\overline{AB} \cong \overline{AC},\ \overline{AE} \cong \overline{AD},\ \widehat{BAE} \cong \widehat{CAD}$$

(el ángulo del vértice en A es común para ambos triángulos).
Se concluye que dichos triángulos son congruentes (L-A-L). De donde:

$$\widehat{BDC} \cong \widehat{BEC},\ \overline{BE} \cong \overline{CD},\ \widehat{ABE} \cong \widehat{ACD}$$

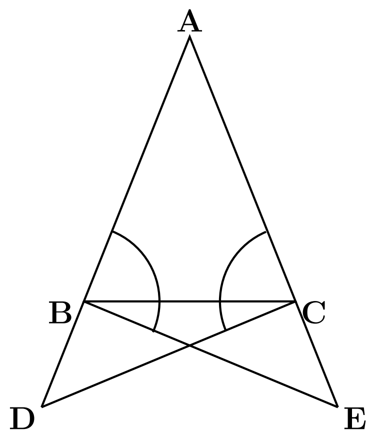


Figura 15.

Consideremos ahora los triángulos $\triangle BDC$, $\triangle CEB$. En dichos triángulos se tiene:

$$\overline{BD} \cong \overline{CE},\ \overline{CD} \cong \overline{BE},\ \widehat{BDC} \cong \widehat{BEC}$$

luego $\triangle BDC \cong \triangle CEB$ (axioma L-A-L), de donde, $\widehat{EBC} \cong \widehat{DCB}$
y puesto que ya se tenía $\widehat{ABE} \cong \widehat{ACD}$ y por Teorema 7. y Corolario 1.

$$\overrightarrow{BC} \subset Int\widehat{ABE},\ \ \overrightarrow{CB} \subset Int\widehat{ACD},$$

se sigue por diferencia de ángulos que $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$ que era lo que se quería demostrar. ■

Definición 13.

i) *Dos ángulos se llaman adyacentes si tienen el mismo vértice, un lado común y ninguno de los lados de uno de ellos está en el interior del otro, (ver Figura 16.).*

ii) *Dos ángulos hacen un par lineal si son adyacentes y los lados no comunes forman semirrectas opuestas, (ver Figura 17.).*

iii) *Dos ángulos se llaman opuestos por el vértice si tienen el mismo vértice y los lados de ambos ángulos forman semirrectas opuestas, (ver Figura 18.).*

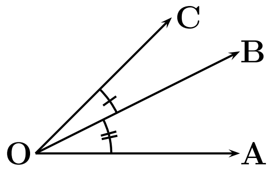


Figura 16.
Adyacentes

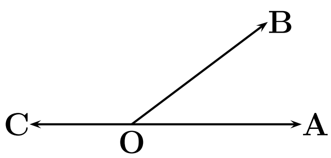


Figura 17.
Par lineal

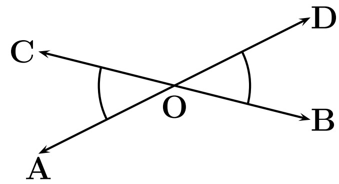


Figura 18.
Opuestos por el vértice

En la Figura 16., los ángulos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ son adyacentes. En la Figura 17., los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ hacen un par lineal. En la Figura 18., los ángulos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOD}$ son opuestos por el vértice.

<u>Observaciones</u>:

i) Todo ángulo hace un par lineal con, exactamente, dos de sus ángulos adyacentes. En la Figura 18., el ángulo $\widehat{AOB}$ hace un par lineal con $\widehat{BOD}$ y también con $\widehat{AOC}$.

ii) Cuando dos rectas se cortan, hacen, alrededor del punto común, cuatro ángulos que son opuestos por el vértice de dos en dos. En la Figura 19., las parejas $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$, así como $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOD}$ son respectivamente ángulos opuestos por el vértice.

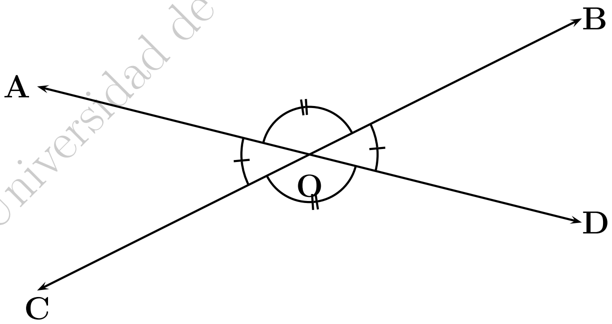


Figura 19.

Teorema 14 (Teorema del par lineal).

Si uno de los ángulos de un par lineal, es congruente a uno de los ángulos de otro par lineal, entonces los otros dos ángulos también son congruentes.

Demostración: sean $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ un par lineal y $\widehat{A'O'B'}$, $\widehat{A'O'C'}$ otro par lineal tales que $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$ (Figura 20.). Veamos que

$$\widehat{AOC} \cong \widehat{A'O'C'}.$$

Supongamos que los puntos A', B', C' se tomaron de tal modo que:

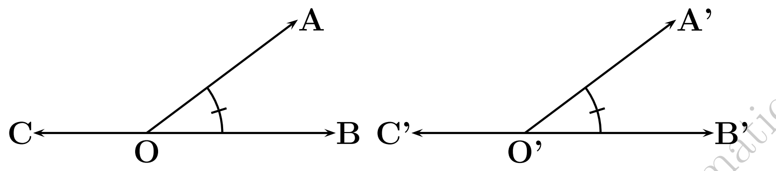


Figura 20.

$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}$, $\overline{OB} \cong \overline{O'B'}$, $\overline{OC} \cong \overline{O'C'}$, (Ver Figura 21.)

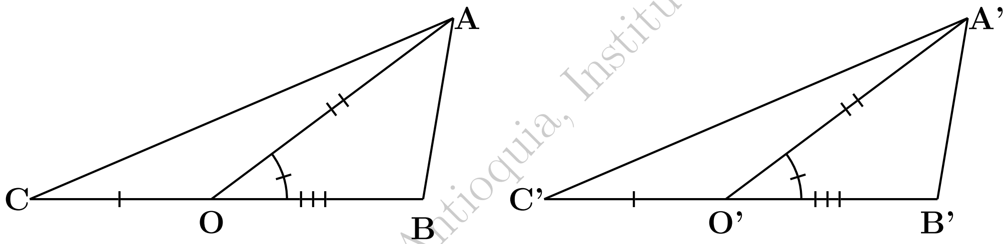


Figura 21.

Se tiene por tanto, $\triangle AOB \cong \triangle A'O'B'$, (L-A-L) y
$\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$ (Suma de segmentos congruentes).
De donde, $\widehat{OBA} \cong \widehat{O'B'A'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

Ahora se puede concluir que: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (L-A-L),
Luego, $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

De estas dos últimas relaciones junto con $\overline{OC} \cong \overline{O'C'}$ podemos afirmar que $\triangle AOC \cong \triangle A'O'C'$ (L-A-L) y por tanto concluimos que:
$\widehat{AOC} \cong \widehat{A'O'C'}$ como se quería. ■

Corolario 4. *Dos ángulos opuestos por el vértice, son congruentes.*

Demostración: sean $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ ángulos opuestos por el vértice, luego las semirrectas $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas, lo mismo que las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$, (ver Figura 22.)

Veamos que los ángulos $\widehat{AOB}$ y $\widehat{COD}$ son congruentes.

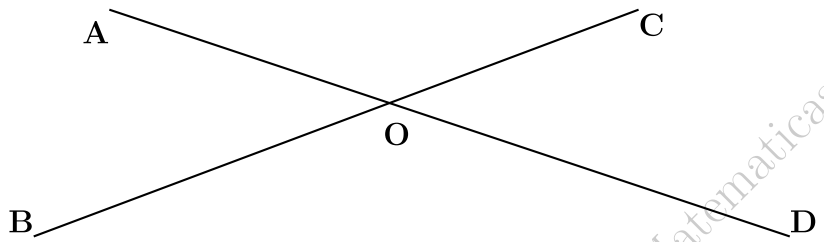


Figura 22.

Esto resulta como una consecuencia del teorema anterior, ya que el ángulo $\widehat{AOC}$ hace un par lineal con cada uno de dichos ángulos. ■

Ejercicio (recíproco del Corolario 4.): si $A - O - D$ y C, B estan en semiplanos opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{AD}$ y $\widehat{AOB} \cong \widehat{COD}$ entonces $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$ son semirrectas opuestas.
El **Teorema 14** permite demostrar el recíproco del **Teorema 13**, como se verá a continuación.

Teorema 15.

Todo triángulo que tenga dos de sus ángulos congruentes, es isósceles.

Demostración: consideremos en el triángulo $\triangle ABC$, los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ACB}$ congruentes y veamos que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, (Figura 23.).

Para ello, sean D y E puntos tales que B está entre A y D, C entre A y E y $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.

Por el **Teorema 14**, y en vista de que $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$ y además $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CBD}$ hacen un par lineal y $\widehat{ACB}$ y $\widehat{BCE}$ hacen otro par lineal, se tiene:

$$\widehat{CBD} \cong \widehat{BCE}$$

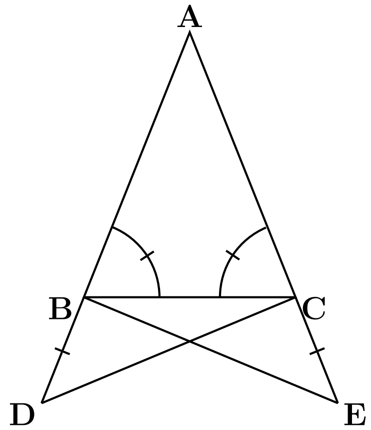


Figura 23.

Siendo $\overline{BC}$ un lado común para los triángulos $\triangle CBD$ y $\triangle CBE$, se concluye que dichos triángulos son congruentes (L-A-L). De donde:

$$\overline{BE} \cong \overline{CD},\ \widehat{BDC} \cong \widehat{BEC},\ \widehat{EBC} \cong \widehat{DCB}$$

Como se tienen las congruencias, $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$ y $\widehat{EBC} \cong \widehat{DCB}$, se sigue que $\widehat{ABE} \cong \widehat{ACD}$ (Suma de ángulos congruentes) y por lo tanto los triángulos $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ que tienen además $\widehat{BEC} \cong \widehat{BDC}$ y $\overline{BE} \cong \overline{CD}$, son congruentes (A- L-A), de donde $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ como se quería demostrar. ■

Observación: los **Teoremas 13 y 15** se pueden reunir en un solo enunciado, así:

Teorema 16 (Teorema del triángulo isósceles).

Un triángulo es isósceles si y solo si dos de sus ángulos son congruentes.

Definición 14. *Un triángulo $\triangle ABC$ se llama equilátero si sus tres lados son congruentes, es decir, $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$.*

Una consecuencia del **Teorema 16** es la siguiente:

Corolario 5. *Un triángulo es equilátero si y solo si sus ángulos interiores son congruentes.*

Observación: la demostración del corolario anterior se propone al lector.

El teorema que sigue es un tercer caso de congruencia de triángulos.

Teorema 17 (Caso lado-lado-lado: L-L-L).

Si un triángulo tiene sus tres lados respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces estos dos triángulos son congruentes .

Demostración: sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos que tienen: (Figura 24.),

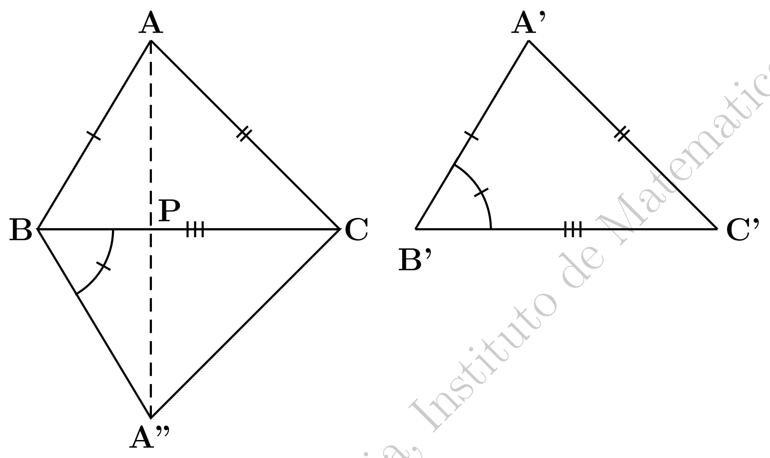


Figura 24.

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

Consideremos en el semiplano $\overleftrightarrow{BC}$ $/\neg A$ el punto A'' tal que:
$\widehat{CBA''} \cong \widehat{A'B'C'}$, $\overline{A''B} \cong \overline{A'B'}$ (Axiomas de construcción del segmento y el ángulo).
Según el axioma de separación del plano, el segmento $\overline{AA''}$ tiene un punto P en la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Para dicho punto P se presentan tres opciones:
1. P está en el interior de $\overline{BC}$, como en la Figura 24.
2. P coincide con uno de los extremos, como en la Figura 25.
3. P está en el exterior de $\overline{BC}$, como en la Figura 26.

Vamos a demostrar el caso 1. Los otros dos se dejan al lector.

Los triángulos $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A''BC$ son congruentes por tener:

$$\overline{A''B} \cong \overline{A'B'}, \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}, \quad \widehat{CBA''} \cong \widehat{C'B'A'} \quad \textit{(L-A-L)}.$$

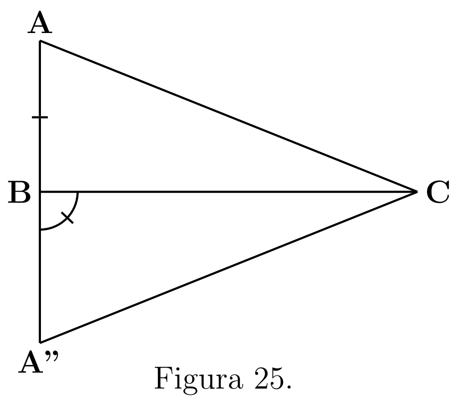


Figura 25.

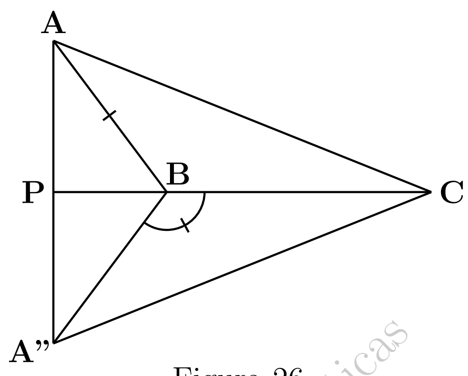


Figura 26.

Veamos ahora que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A''BC$ son congruentes.
Por una parte se tiene $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{A'B'} \cong \overline{A''B}$, luego $\overline{AB} \cong \overline{A''B}$ (transitividad), de donde el triángulo $\triangle ABA''$ es isósceles y por tanto $\widehat{BAA''} \cong \widehat{BA''A}$ **(Teorema 13)**.
En la misma forma, el triángulo $\triangle ACA''$ es isósceles y por tanto:

$$\widehat{CAA''} \cong \widehat{CA''A}.$$

Por otra parte, el segmento $\overline{AA''}$ pasa por P, punto entre B y C, luego (por **Teorema 7** y **corolario 1.**), $\overrightarrow{AA''} \subset Int\widehat{BAC}$ y $\overrightarrow{A''A} \subset Int\widehat{BA''C}$ y por el axioma de “Suma”de ángulos congruentes se tiene: $\widehat{BAC} \cong \widehat{BA''C}$.

Finalmente, los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A''BC$ tienen:

$$\overline{AB} \cong \overline{A''B},\ \overline{AC} \cong \overline{A''C},\ \widehat{BAC} \cong \widehat{BA''C}$$

y por el axioma L-A-L se concluye, $\triangle ABC \cong \triangle A''BC$. Como ya se tenía $\triangle A'B'C' \cong \triangle A''BC$ entonces, por transitividad, (ver la siguiente observación de este teorema), $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ como se quería demostrar. ■

Construción básica: construir un ángulo $\widehat{AOB}$ dado, conociendo el lado $\overrightarrow{O'X}$ del ángulo y el semiplano determinado por el lado dado $\overrightarrow{O'X}$.

Construcción. (Ver Figura 27.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

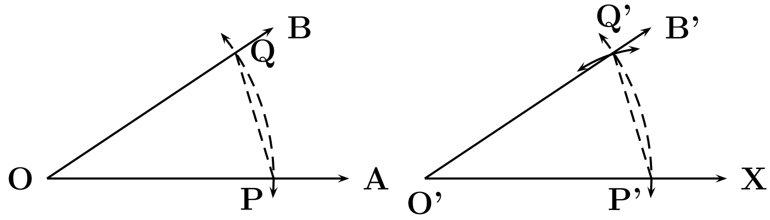


Figura 27.

- Con centro en O y radio cualesquiera, trazo arco, que corta a los lados del ángulo dado $\widehat{AOB}$ en P y Q .
- Con centro en O' y el mismo radio trazo arco que corta a $\overrightarrow{O'X}$ en P'.
- Con centro en P' y radio $\overline{PQ}$ trazo arco, que corta al anterior arco en Q'.
- El ángulo $\widehat{P'O'Q'}$ es el ángulo pedido.

Justificación. Como $\overline{OP} \cong \overline{O'P'}$ y $\overline{OQ} \cong \overline{O'Q'}$ y $\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}$ entonces

$$\triangle POQ \cong \triangle P'O'Q',$$

luego

$$\widehat{POQ} \cong \widehat{P'O'Q'}.$$

Observación: la transitividad para la congruencia entre triángulos es un resultado que se obtiene fácilmente a partir de la transitividad de la congruencia tanto entre segmentos como entre ángulos.

3.2.1. DESIGUALDADES

Notación: vamos a denotar a las semirrectas que un punto determina en una recta **a**, por $\overline{\mathbf{a}}$ y $\overline{\mathbf{a'}}$. En consecuencia, $\overline{\mathbf{a}}$ y $\overline{\mathbf{a'}}$ son semirrectas opuestas de una misma recta **a**, (ver Figura 28.).

El ángulo formado por dos semirrectas $\overline{\mathbf{a}}$ y $\overline{\mathbf{b}}$ lo denotaremos: $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ (Ver Figura 29.).

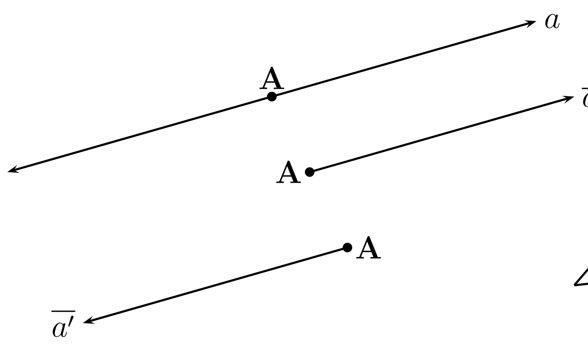


Figura 28.

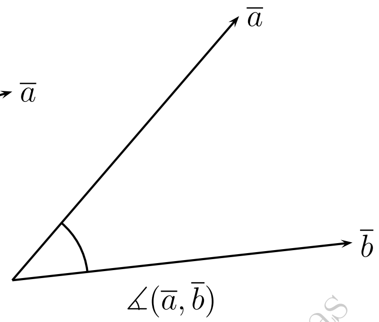


Figura 29.

Definición 15.

i. *Dados dos segmentos* $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ *se dice que* $\overline{AB}$ *es mayor que* $\overline{A'B'}$, *o bien que* $\overline{A'B'}$ *es menor que* $\overline{AB}$, *si existe un punto* C *en el interior de* $\overline{AB}$ *tal que* $\overline{AC} \cong \overline{A'B'}$, *(Figura 30.).*

ii. *Dados dos ángulos:* $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})$, $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{d}})$ *se dice que* $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})$ *es mayor que* $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{d}})$, *o bien que* $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{d}})$ *es menor que* $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})$, *si existe una semirrecta* $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$ *en el interior y con origen en el vértice de* $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})$ *tal que (ver Figura 31.):*

$$\measuredangle(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{h}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{d}}).$$

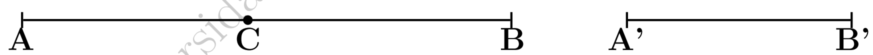


Figura 30.

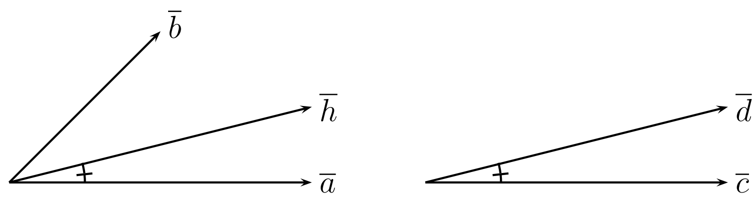


Figura 31.

Observación:

1. Por definición el segmento nulo es menor que cualquier segmento no nulo.

2. También por definición, decimos que cualquier ángulo no nulo y no llano es mayor que el ángulo nulo y menor que el ángulo llano.

3. Para expresar que un segmento es mayor que otro se emplea el símbolo $>$. Dicho símbolo también será empleado para expresar que un ángulo es mayor que otro.

4. Para la expresión menor que será empleado el símbolo $<$.

Teorema 18 (Ley de tricotomía para segmentos).

Dados dos segmentos cualesquiera $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, siempre se cumple una de las tres relaciones siguientes:

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad o \quad \overline{AB} > \overline{CD} \quad o \quad \overline{AB} \cong \overline{CD}$$

y cada una de ellas excluye las otras dos.

Demostración: por el axioma de construcción del segmento, sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ existe un punto X tal que:

$$\overline{AX} \cong \overline{CD}$$

De acuerdo con el axioma II.4 se presentan tres posibilidades:
1. Puede ocurrir que X esté entre A y B en cuyo caso: $\overline{AB} > \overline{CD}$.
2. Puede ocurrir que B esté entre A y X en cuyo caso: $\overline{AB} < \overline{CD}$.
3. Puede ocurrir que X coincida con B en cuyo caso: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Veamos ahora que cualquiera de las posibilidades que se de, excluye las otras dos. Supongamos por ejemplo $\overline{AB} < \overline{CD}$. Entonces existe un punto X en el interior de $\overline{CD}$ tal que: $\overline{CX} \cong \overline{AB}$.
Si también fuera posible $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces se tendría por transitividad, $\overline{CX} \cong \overline{CD}$, de donde X coincidiría con D (por el Ax. de construcción de segmento), absurdo, ya que X esta en el interior de $\overline{CD}$.

Tampoco puede tener lugar $\overline{AB} > \overline{CD}$ simúltaneamente con $\overline{AB} < \overline{CD}$ ya que si ambas relaciones se dieran, se tendría un punto Y entre A y B tal que:

$$\overline{AY} \cong \overline{CD}.$$

Puesto que ya se tenía $\overline{AB} \cong \overline{CX}$ se tiene por una aplicación del **Teorema 10.** que D está entre C y X, lo cual contradice la afirmación hecha antes de que X es un punto interior de $\overline{CD}$. ■

Teorema 19 (Propiedad transitiva).

Sean $\overline{AB} < \overline{CD}$ y $\overline{CD} < \overline{EF}$. Entonces $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Demostración: puesto que $\overline{CD} < \overline{EF}$, existe un punto Y entre E y F tal que: $\overline{CD} \cong \overline{EY}$

De la misma manera, puesto que $\overline{AB} < \overline{CD}$, existe un punto X entre C y D tal que: $\overline{AB} \cong \overline{XC}$, (ver Figura 32.).

Aplicando el axioma de construcción del segmento, sea P un punto de la semirrecta $\overrightarrow{EF}$ tal que: $\overline{EP} \cong \overline{CX}$.

Entonces por el **Teorema 10**, se sigue que P está entre E y Y. Además, por transitividad se tiene $\overline{AB} \cong \overline{EP}$.

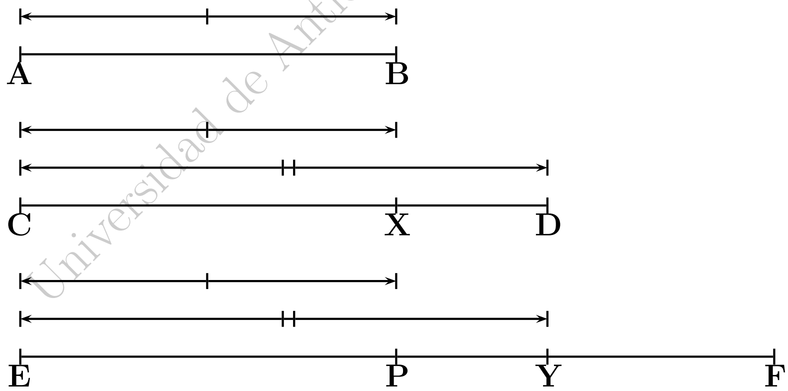


Figura 32.

En conclusión (por el Ax. II.5), se tiene un punto P entre E y F tal que: $\overline{AB} \cong \overline{EP}$ lo cual significa que $\overline{AB} < \overline{EF}$. ■

El siguiente teorema se deja la demostración para el lector.

Teorema 20.

Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} < \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} < \overline{EF}$.

Corolario 6. *Si el segmento $\overline{CD}$ es un subconjunto propio del segmento $\overline{AB}$, entonces $\overline{CD} < \overline{AB}$.*

Figura 33.

Demostración: (ver Figura 33.), los casos en que C coincide con A o con B o D coincide con A o con B son triviales, los otros casos que pueden suceder son $A-C-D$ o $A-D-C$.
Si $A-C-D$ entonces $\overline{CD} < \overline{AD}$ y como $A-D-B$ entonces $\overline{AD} < \overline{AB}$ y por la propiedad transitiva (Teorema 19.) $\overline{CD} < \overline{AB}$.
Similarmente se demuestra para el caso $A-D-C$ ■

Observación: análogos a los dos últimos teoremas y a los anteriores corolarios, tienen lugar resultados relativos a ángulos, 1os cuales se enuncian a continuación.

Teorema 21.

i) Dados dos ángulos cualesquiera, $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$ y $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}})$, siempre se cumple una de las relaciones siguientes:

$$\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) > \measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}), \quad \measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}), \quad \measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}})$$

y cada una de ellas excluye las otras dos.

ii) Propiedad transitiva: sean $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}})$ y $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{f}})$. Entonces, $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{f}})$

iii) Si $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}})$ y $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{f}})$, entonces $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{e}}, \overline{\mathbf{f}})$

iv) Si el ángulo $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}})$ tiene el mismo vértice y está en el interior del ángulo $\measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$, entonces $\measuredangle(\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}) < \measuredangle(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$

3.3. PERPENDICULARIDAD

Definición 16. *Si los ángulos de un par lineal son congruentes, cada uno de ellos se llama ángulo recto, (Ver Figura 34.).*
Decimos que dos rectas que se interceptan l y m son perpendiculares cuando los ángulos que forman son ángulos rectos y lo denotamos así: $l \perp m$

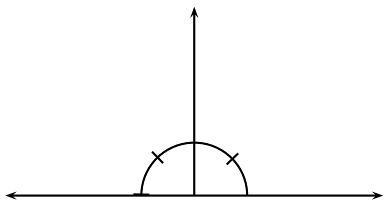


Figura 34.

El siguiente teorema garantiza que existen ángulos rectos:

Teorema 22 (Existencia del ángulo recto).

Sean O y A puntos de una recta l. A partir de O se trazan segmentos congruentes $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ situados en semiplanos opuestos respecto a l, tales que: $\widehat{AOC} \cong \widehat{AOD}$, (Ver Figura 35.). Entonces las rectas l y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan formando ángulo recto.

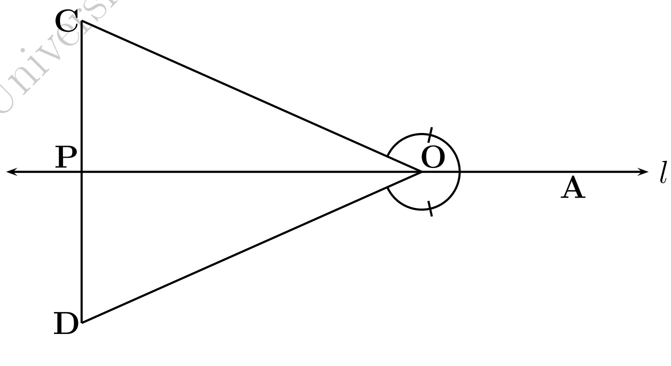


Figura 35.

Demostración: puesto que los puntos C y D están en semiplanos opuestos respecto a la recta l, por el axioma de separación del plano, existe un punto $P \in l$ tal que $\{P\} = l \cap \overline{CD}$. Con el punto P pueden suceder tres casos:
a. El punto P y el punto A están del mismo lado con respecto a O.
b. El punto P esta en la semirrecta opuesta a la semirrecta $\overrightarrow{OA}$, es decir $P - O - A$, (ver Figura 35.).
c. El punto P coincide con O.
Veamos el caso b. Como los ángulos $\widehat{OPC}$, $\widehat{OPD}$ hacen par lineal, ya que tienen un lado común $\overline{OP}$ y los otros dos lados son semirrectas opuestas, veamos que estos ángulos son congruentes.
Como $\widehat{AOC}$ y $\widehat{COP}$ forman par lineal y $\widehat{AOD}$ y $\widehat{DOP}$ también forman par lineal y por hipótesis $\widehat{AOC} \cong \widehat{AOD}$, entonces por el teorema del par lineal $\widehat{COP} \cong \widehat{DOP}$.

De lo anterior concluimos que los triángulos $\triangle OPC$ y $\triangle OPD$ son congruentes, por tener: $\widehat{POC} \cong \widehat{POD}$, $\overline{OC} \cong \overline{OD}$, $\overline{OP}$ lado común (L-A-L). Luego los ángulos del par lineal $\widehat{OPC}$, $\widehat{OPD}$ son congruentes y de acuerdo a la definición 15, se sigue que tanto $\widehat{OPC}$ como $\widehat{OPD}$ son ángulos rectos.
Se deja como ejercicio, demostrar los casos a. y c. $\blacksquare$

Teorema 23 (Unicidad).

Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí, (ver Figura 36.)

Demostración: supongamos que $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'O'B'}$ son rectos; por la ley de tricotomía para ángulos, pueden suceder tres casos:

i) $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$ ó
ii) $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$ ó
iii) $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$

Caso i) Si $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$, entonces existe $\overrightarrow{O'X} \subset Int\widehat{A'O'B'}$ tal que $\widehat{A'O'X} \cong \widehat{AOB}$ y por el **Corolario 2.** del **Teorema 8** $\overrightarrow{O'B'} \subset Int\widehat{C'O'X}$, luego (por la definición de menor que),

$$\widehat{C'O'B'} < \widehat{C'O'X} \qquad (1)$$

Por el Axioma de construcción de ángulo, existe $\overrightarrow{O'Y} \subset \Pi_{\overleftrightarrow{C'O'}:B'}$ tal que $\widehat{C'O'Y} \cong \widehat{A'O'X}$; como $\overrightarrow{O'X} \subset Int\widehat{A'O'B'}$ y $\widehat{A'O'X} \cong \widehat{C'O'Y}$ y $\widehat{A'O'B'} \cong$

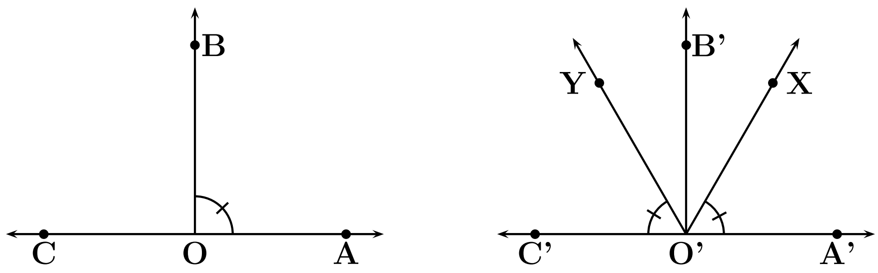


Figura 36.

$\widehat{C'O'B'}$ (por hipótesis) entonces por el **Teorema 11**,

$$\overrightarrow{O'Y} \subset Int\widehat{C'O'B'},$$

luego (por la definición de menor que),

$$\widehat{C'O'Y} < \widehat{C'O'B'} \quad (2)$$

y de (1) y (2)

$$\widehat{C'O'Y} < \widehat{C'O'X} \qquad (3).$$

Pero $\widehat{C'O'X} \cong \widehat{COB}$ (por Teorema del par lineal)
y $\widehat{COB} \cong \widehat{AOB}$ (por definición de ángulo recto)
y $\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'X} \cong \widehat{C'O'Y}$
luego

$$\widehat{C'O'X} \cong \widehat{C'O'Y} \quad (4).$$

Pero (3) y (4) es un absurdo.

iii) Se hace en forma similar a i)

Por el **Teorema 21 i)**, se concluye que es cierto ii):

$$\widehat{AOB} \cong \widehat{A'O'B'}$$ ■

Definición 17 (Ángulo agudo y obtuso).
i) Decimos que un ángulo es agudo si es menor que un ángulo recto.
ii) Decimos que un ángulo es obtuso si es mayor que un ángulo recto.

Definición 18 (**Triángulo rectángulo).** *Un triángulo se llama rectángulo si alguno de sus ángulos es recto.*

Observaciones:
1) Más adelante se podrá demostrar que un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.
2) En un triángulo rectángulo los lados adyacentes al ángulo recto se llaman catetos y el lado opuesto al ángulo recto, se le llama hipotenusa, (ver Figura 37.)

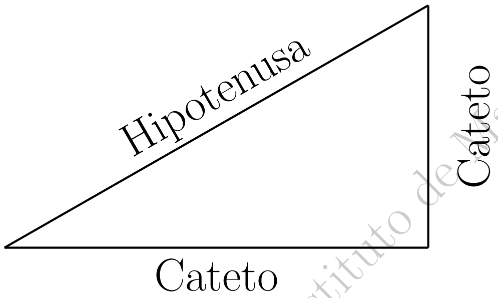


Figura 37.

3.4. PUNTO MEDIO Y BISECTRIZ

Los siguientes dos teoremas garantizan la existencia del punto medio, es decir, todo segmento se puede dividir en dos segmentos congruentes y es único.

Teorema 24 (Existencia del Punto Medio).

Todo segmento no nulo tiene un punto interior que divide al segmento en dos segmentos congruentes.

Demostración. (ver Figura 38.). Sea $\overline{AB}$ un segmento no nulo. Veamos que existe un punto O tal que a). O esta entre A y B y b). $\overline{OA} \cong \overline{OB}$

Veamos a). Sea $X \notin \overleftrightarrow{AB}$, por el **Teorema 3.**, existe un único plano π que contiene a X y $\overleftrightarrow{AB}$, por el **Teorema 5**, $\overrightarrow{AX} \subset \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\, X}$. Por el Ax. de construcción de ángulo, existe en el $\pi_{\overleftrightarrow{AB}:\neg X}$ una única semirrecta $\overrightarrow{BY}$ tal que

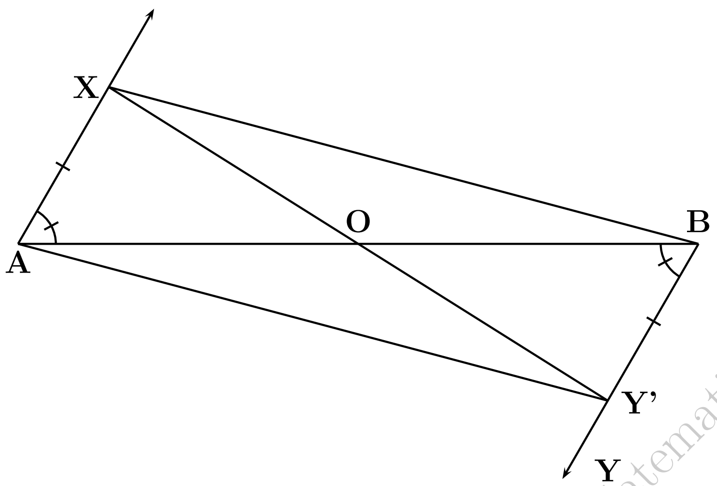


Figura 38.

$\widehat{ABY} \cong \widehat{BAX}$.

Por el Ax. de construcción de segmento, existe en $\overrightarrow{BY}$ un punto Y' tal que $\overline{BY'} \cong \overline{AX}$, luego los ángulos $\widehat{AXB}$ y $\widehat{AY'B}$ son no nulos y no llanos y también los ángulos $\widehat{XAY'}$ y $\widehat{XBY'}$ son no nulos y no llanos; por el axioma de separación del plano, existe $O \in \overleftrightarrow{AB}$ (1) tal que $\overline{XY'} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{O\}$, luego $O \in Int\overline{XY'}$.
Por el **Teorema 7.**, $O \in Int\widehat{XAY'}$ y $O \in Int\widehat{XBY'}$, luego

$$O \in Int\widehat{XAY'} \cap Int\widehat{XBY'},$$

pero $Int\widehat{XAY'} \cap Int\widehat{XBY'} = Int\widehat{AXB} \cap Int\widehat{AY'B}$, luego

$$O \in Int\widehat{AXB} \cap Int\widehat{AY'B} \quad (2)$$

y por el **Teorema 7.**: $Int\overline{AB} \subset Int\widehat{AXB}$ y $Int\overline{AB} \subset Int\widehat{AY'B}$, luego $Int\overline{AB} \subset Int\widehat{AXB} \cap Int\widehat{AY'B}$(3), por tanto de (1), (2) y (3) $O \in Int\overline{AB}$, ya que si $O \notin Int\overline{AB}$ y sabiendo que $O \in \overleftrightarrow{AB}$ entonces

$$O \notin Int\widehat{AXB} \cap Int\widehat{AY'B} = Int\widehat{XAY'} \cap Int\widehat{XBY'},$$

luego $O \notin Int\overline{XY'}$ lo cual es absurdo, ya que $Int\overline{XY'} \subset Int\widehat{XAY'} \cap Int\widehat{XBY'}$

b) Veamos que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$
Como $\overline{AB} \cong \overline{AB}$; $\widehat{XAB} \cong \widehat{ABY'}$; $\overline{AX} \cong \overline{BY'}$ entonces

$$\triangle XAB \cong \triangle ABY' \text{ (L-A-L)}$$

luego $\overline{XB} \cong \overline{AY'}$ y $\widehat{XBA} \cong \widehat{BAY'}$
y por el axioma de suma de ángulos congruentes $\widehat{XAY'} \cong \widehat{XBY'}$.
Por tanto, por el criterio L-A-L, $\triangle XAY' \cong \triangle XBY'$, luego $\widehat{AXO} \cong \widehat{OY'B}$.
Por el criterio A-L-A, $\triangle AXO \cong \triangle BOY'$, luego $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ ■

Definición 19 (Punto medio). *Se llama punto medio de un segmento no nulo $\overline{AB}$, al punto $O \in Int\overline{AB}$ tal que $\overline{AO} \cong \overline{OB}$.*

Ahora veamos la unicidad del punto medio.

Teorema 25 (Unicidad del Punto Medio).

El punto medio de un segmento no nulo es único.

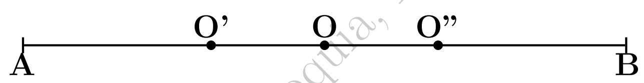


Figura 39.

Demostración. (ver Figura 39.). Sean O y O' puntos medios de $\overline{AB}$, veamos que $O \equiv O'$, luego $\overline{O'A} \cong \overline{O'B}$ y $\overline{OA} \cong \overline{OB}$.
Con $\overline{OA}$ y $\overline{O'A}$ pueden suceder tres casos:
i) $\overline{O'A} < \overline{OA}$ ó ii) $\overline{O'A} \cong \overline{OA}$ ó iii) $\overline{O'A} > \overline{OA}$
i) Si $\overline{O'A} < \overline{OA}$, entonces por definición de $<$: O' está entre A y O; por el Axioma de construcción de segmento, existe $O'' \in \overrightarrow{BA}$ tal que $\overline{O''B} \cong \overline{O'A}$.
Como O' esta entre A y O ($A - O' - O$) y O, O'' están del mismo lado con respecto a B y $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ y $\overline{O'A} \cong \overline{O''B}$ entonces, por el **Teorema 10**, O'' esta entre O y B ($O - O'' - B$) y como O esta entre O' y B ($O' - O - B$) entonces, por el Axioma II.5, O'' esta entre O' y B ($O' - O'' - B$), luego $\overline{BO''} < \overline{O'B}$.
Pero $\overline{BO''} \cong \overline{AO'} \cong \overline{O'B}$ (Absurdo con lo anterior).

iii) Se demuestra en forma similar a i).

Por el **Teorema 18.** (ley de tricotomía para segmentos): $\overline{O'A} \cong \overline{OA}$. $\blacksquare$

Corolario 7. *Los puntos medios de segmentos congruentes dividen a los segmentos en segmentos congruentes.*

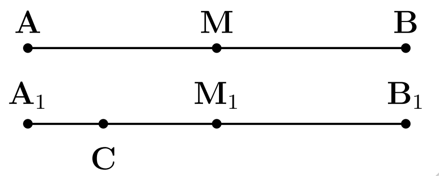


Figura 40.

Demostración. (ver Figura 40.). Sea M punto medio de $\overline{AB}$ y sea M_1 punto medio de $\overrightarrow{A_1B_1}$. Por el Ax. de construcción de segmento, existe $C \in \overrightarrow{A_1B_1}$ tal que $\overline{A_1C} \cong \overline{AM}$; como $A - M - B$ y C, B_1 están del mismo lado con respecto a A_1 y $\overline{AM} \cong \overline{A_1C}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$, entonces por el **Teorema 10** $A_1 - C - B_1$; luego por resta de segmentos congruentes: $\overline{MB} \cong \overline{CB_1}$ y como $\overline{MB} \cong \overline{MA} \cong \overline{A_1C}$, entonces $\overline{CA_1} \cong \overline{CB_1}$, luego C es punto medio de $\overline{A_1B_1}$ y como el punto medio de un segmento es único, entonces $C \equiv M_1$.
Luego $\overline{AM} \cong \overline{MB} \cong \overline{M_1A_1} \cong \overline{M_1B_1}$ $\blacksquare$

Definición 20 (Bisectriz). *Se llama bisectríz de un ángulo $\widehat{AOB}$ no nulo y no llano a la semirrecta $\overrightarrow{OD} \subset Int\widehat{AOB}$ tal que $\widehat{AOD} \cong \widehat{DOB}$, (ver Figura 41.).*

Los dos teorema que veremos a continuación, garantizan que esta definición es correcta.

Teorema 26 (Existencia de la Bisectríz).

Dado un ángulo no nulo y no llano, entonces existe una semirrecta con origen en el vértice del ángulo y en su interior, que lo divide en dos ángulos congruentes.

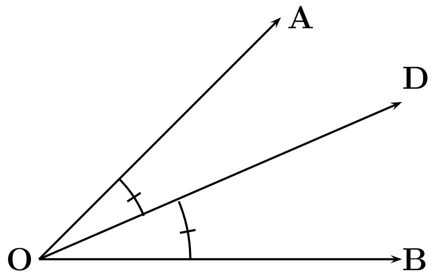


Figura 41.

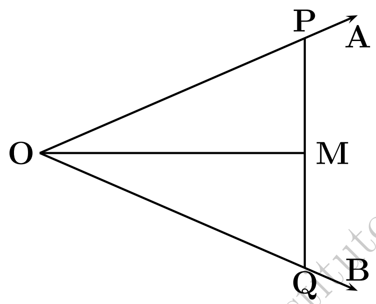


Figura 42.

Demostración. (ver Figura 42.). Sea $\widehat{AOB}$ un ángulo no nulo y no llano. Veamos que existe una semirrecta $\overrightarrow{OX} \subset Int\widehat{AOB}$ tal que

$$\widehat{AOX} \cong \widehat{XOB}.$$

En efecto, sea $P \in \overrightarrow{OA}$, entonces por el Ax. de construcción de segmento, existe $Q \in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overline{OQ} \cong \overline{OP}$, luego por los teoremas de existencia y unicidad del punto medio, existe un único punto $M \in Int\overline{PQ}$ tal que $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$.
Por lo tanto $\triangle OMP \cong \triangle OMQ$ (por criterio L-L-L).
Luego $\widehat{MOP} \cong \widehat{MOQ}$, por lo tanto $\overrightarrow{OM}$ es bisectríz de $\widehat{AOB}$ y Y como $M \in Int\overline{PQ}$, entonces $\overrightarrow{OM} \subset Int\widehat{AOB}$ (Teorema 7. y corolario 1.) ■

Teorema 27 (Unicidad de la bisectríz).

La bisectríz de un ángulo no nulo y no llano es única.

Demostración. (ver Figura 43.). Supongamos que existen dos bisectrices de $\widehat{AOB}$.

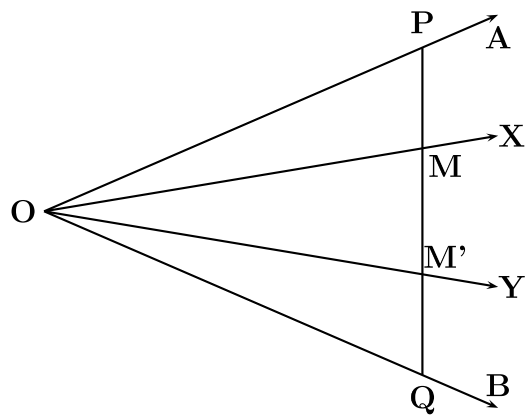


Figura 43.

Sean $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ dichas bisectrices. Veamos que $\overrightarrow{OX} \equiv \overrightarrow{OY}$
Sea $P \in \overrightarrow{OA}$, entonces por el Ax. de construcción de segmento, existe $Q \in \overrightarrow{OB}$ tal que $\overline{OQ} \cong \overline{OP}$.
Por el Teorema de la barra transversal, existen M y M' tales que

$$\{M\} = \overline{PQ} \cap \overrightarrow{OX}, \quad \{M'\} = \overline{PQ} \cap \overrightarrow{OY},$$

Como $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ y $\widehat{POM} \cong \widehat{MOQ}$ y $\overline{OM} \cong \overline{OM}$, entonces $\triangle OMP \cong \triangle OMQ$ (por L-A-L) y por tanto

$$\overline{MP} \cong \overline{MQ}.$$

Similarmente: $\triangle OM'P \cong \triangle OM'Q$ (por L-A-L) y por tanto

$$\overline{M'P} \cong \overline{M'Q}.$$

Luego M y M' son puntos medios de $\overline{PQ}$, luego $M \equiv M'$, porque el punto medio es único. ■

Corolario 8. *Las bisectrices de ángulos congruentes dividen a éstos ángulos, en ángulos congruentes.*

Definición 21. *Sean* **a** *y* **b** *dos rectas distintas. La recta* **a** *es perpendicular a la recta* **b**, *si* **a** *corta a* **b** *formando ángulo recto.*

Observaciones:
1. Para indicar que **a** es perpendicular a **b** se emplea la notación: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.
2. Si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ se sigue de inmediato que $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ y por tanto es correcto decir que las rectas **a** y **b** son perpendiculares entre sí o que se cortan perpendicularmente.
3. Si dos rectas se cortan perpendicularmente en un punto, los cuatro ángulos que se forman alrededor de dicho punto son rectos, (ver Figura 44.)

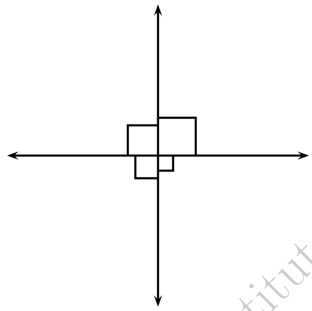


Figura 44.

Teorema 28 (Existencia y unicidad de la perpendicular por un punto de una recta).

Por un punto de una recta dada en un plano π pasa una y solo una perpendicular a dicha recta.

Demostración: la demostración consta de dos partes. Veamos primero que si **l** es la recta dada en el plano π y A es un punto cualquiera de **l**, hay por lo menos una recta perpendicular a **l** que pasa por A y está situada en π.

Para demostrar esta primera parte, sea **k** una recta distinta de **l** y que también pasa por A. Sea $\overline{\mathbf{k}}$ una de las semirrectas en que A divide a **k**.

Si los ángulos $\measuredangle(\overline{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}})$ y $\measuredangle(\overline{\mathbf{l'}}, \overline{\mathbf{k}})$ que forman un par lineal, son congruentes, cada uno es recto y por tanto $\mathbf{k} \perp \mathbf{l}$ y la demostración termina, (Ver Figura 45.).

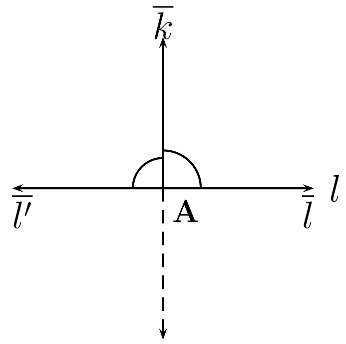


Figura 45.

Pero si los ángulos del par lineal son diferentes, por el Ax. de construcción de ángulo, sea $\overline{\mathbf{h}}$ una semirrecta de origen A situada en el semiplano $\pi_{\mathbf{l}:\,\overline{\mathbf{k}}}$ tal que:

(1) $\measuredangle(\bar{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{l'}}, \overline{\mathbf{h}})$

Se presentan dos posibilidades respecto a $\overline{\mathbf{h}}$:

i) La semirrecta $\overline{\mathbf{h}}$ está en el exterior de $\measuredangle(\bar{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}})$. (Esto ocurre cuando $\measuredangle(\bar{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}})$ es agudo, (Figura 46.)).

ii) La semirrecta $\overline{\mathbf{h}}$ está en el interior de $\measuredangle(\bar{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}})$. (Esto ocurre cuando $\measuredangle(\bar{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{k}})$ es obtuso, Figura 47.).

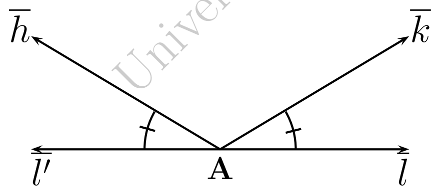


Figura 46.

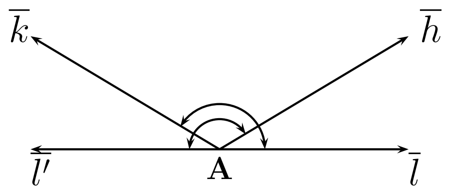


Figura 47.

Para ambos casos se puede continuar de la siguiente manera:

Se traza por A la bisectríz $\overline{\mathbf{b}}$ del ángulo $\measuredangle(\overline{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{h}})$. Por tanto:

(2) $\measuredangle(\overline{\mathbf{h}}, \overline{\mathbf{b}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{k}}, \overline{\mathbf{b}})$, (Figura 48.).

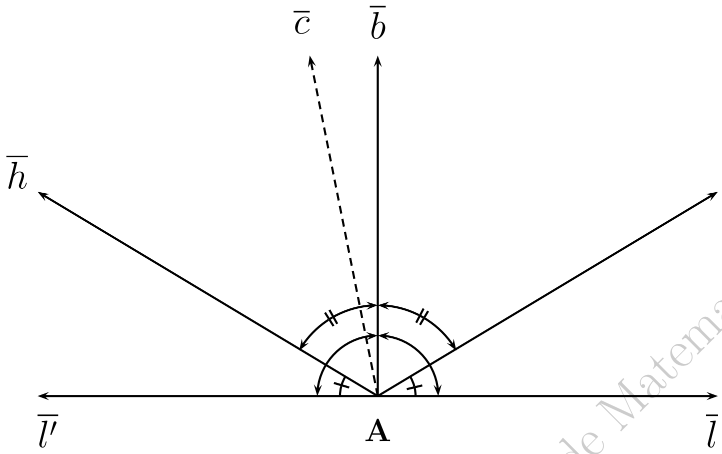


Figura 48.

De (1) y (2) se obtiene, por suma de ángulos, en el caso del ángulo agudo y por diferencia, en el caso del ángulo obtuso,

$$\measuredangle(\overline{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{b}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{l'}}, \overline{\mathbf{b}})$$

Estos dos ángulos forman un par lineal, luego cada uno de ellos es recto. Se concluye así que $\mathbf{b} \perp \mathbf{l}$.

Veamos ahora que **b** es la única perpendicular a **l** que pasa por A y está en el plano π.

Sea **c** una perpendicular a **l** que pasa por A y está en π. Sea $\overline{\mathbf{c}}$ la semirrecta de origen en A que está en el semiplano $\pi_1 : \overline{\mathbf{b}}$.

Por tanto el ángulo $\measuredangle(\overline{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{c}})$ es recto y como todos los ángulos rectos son congruentes **(Teorema 23)**, se sigue que:

$$\measuredangle(\overline{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{c}}) \cong \measuredangle(\overline{\mathbf{l}}, \overline{\mathbf{b}})$$

Por el axioma de construcción de ángulo se concluye que las semirrectas $\overline{\mathbf{c}}$ y $\overline{\mathbf{b}}$ coinciden y esto demuestra la segunda parte de la prueba. ■

Definición 22 (Mediatríz).
La recta perpendicular en el punto medio de un segmento no nulo se le llama mediatríz del segmento.

Definición 23 (Segmentos notables en el triángulo).
*i) En todo triángulo, se llama **altura** del triángulo al segmento perpendicular trazado desde uno cualquiera de los vértices, al lado opuesto o a su prolongación .*
*ii) Se llama **mediana** del triángulo, al segmento comprendido entre uno cualquiera de los vértices y el punto medio del lado opuesto .*
*iii) Se llama **bisectríz** del triángulo al segmento comprendido entre uno cualquiera de los vértices y el lado opuesto y que divide al ángulo correspondiente a dicho vértice en dos ángulos congruentes.*

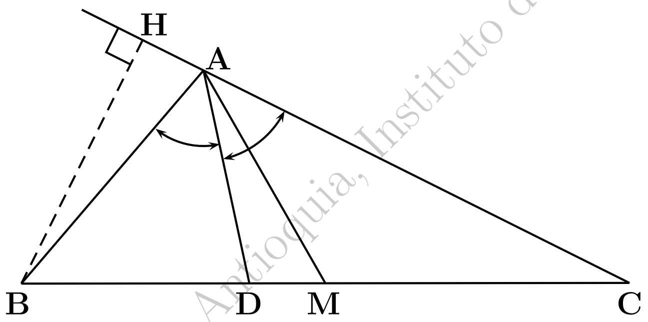


Figura 49.

En la Figura 49.: $\overline{BH}$ altura, $\overline{AM}$ mediana, $\overline{AD}$ bisectríz

Observación: tanto la mediana como la bisectríz son segmentos que están en el interior del triángulo. Sin embargo la altura no siempre está en el interior.

Teorema 29 (Propiedades del triángulo isósceles).
En un triángulo isósceles, la mediana correspondiente a la base es altura, bisectríz y está contenida en la mediatríz de la base.

Demostración: sea $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AM}$ la mediana correspondiente a la base $\overline{BC}$, (Figura 50.).

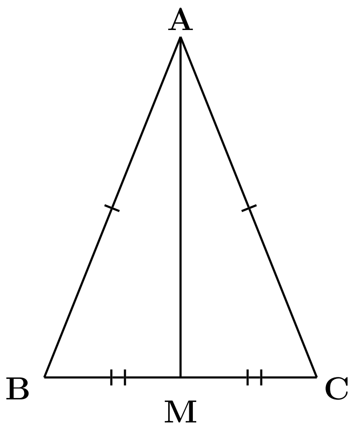


Figura 50.

Se tiene $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ (definición de mediana), con M entre B y C.
Por tanto, $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ (L-L-L). De donde,

$\measuredangle BAM \cong \measuredangle MAC$, luego $\overline{AM}$ es bisectríz del $\triangle ABC$.
También $\measuredangle BMA \cong \measuredangle AMC$, con lo cual se tiene un par lineal de ángulos congruentes y por tanto $\overline{AM} \perp \overline{MC}$, o sea que $\overline{AM}$ es altura del $\triangle ABC$.
Además, como M es punto medio de $\overline{BC}$, el segmento $\overline{AM}$ está sobre la mediatríz del segmento $\overline{BC}$. ■

Observación:

a). También es cierto que: en un triángulo isósceles, la bisectriz correspondiente a la base es altura, mediana y está contenida en la mediatríz de la base (demostrarlo).

b). También es cierto que: en un triángulo isósceles, la altura correspondiente a la base es bisectriz, mediana y está contenida en la mediatríz de la base (para su demostración se necesita uno de los criterios de congruencia de triángulos rectángulos).

El siguiente teorema es el recíproco del teorema anterior, la parte i), ii) y iii) se pueden demostrar fácilmente y se dejan como ejercicio, la parte iv) se puede demostrar cuando se tengan los teoremas de congruencia de triángulos rectángulos.

Teorema 30 (Recíproco del teorema anterior).

i). Si en un triángulo coinciden la mediana y la altura entonces el triángulo es isósceles.

ii). Si en un triángulo coinciden la bisectriz y la altura entonces el triángulo es isósceles.

iii). Si en un triángulo la mediana esta contenida en la mediatriz entonces el triángulo es isósceles.

iv). Si la mediana y la bisectríz relativas al lado adyacente a los ángulos agudos de un triángulo coinciden, entonces el triángulo es isósceles.

Construcciones básicas:

1. Hallar el punto medio y la mediatríz de un segmento dado.

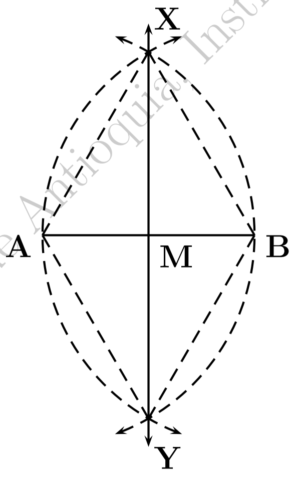


Figura 51.

Construcción. (Ver Figura 51.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en A y radio $\overline{AB}$ trazo arco.
- Con centro en B y el mismo radio trazo arco que corta al anterior arco en X e Y.

- Uno X con Y y la recta $\overleftrightarrow{XY}$ corta a $\overline{AB}$ en M.
- La recta $\overleftrightarrow{XY}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y M es punto medio de $\overline{AB}$.

Justificación. Como X e Y están en semiplanos opuestos con respecto $\overleftrightarrow{AB}$, entonces existe un punto M tal que

$$\{M\} = \overline{XY} \cap \overleftrightarrow{AB}\ .$$

Por el criterio L-L-L, $\triangle AXB \cong \triangle AYB$, luego $\widehat{XAM} \cong \widehat{MAY}$, luego por el criterio L-A-L,

$$\triangle XAM \cong \triangle YAM$$

luego $\widehat{XMA} \cong \widehat{YAM}$ y ambos forman par lineal, por lo tanto son rectos, entonces en el triángulo isósceles $\triangle AXB$, $\overline{XM}$ es altura y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, $\overline{XM}$ es mediana y $\overleftrightarrow{XM}$ es mediatriz. Luego M es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{XY}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.

2. Hallar la bisectríz de un ángulo dado.

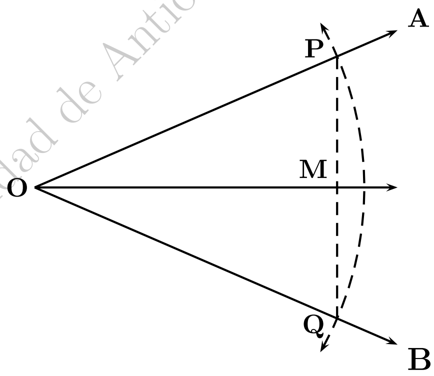


Figura 52.

Construcción. (Ver Figura 52.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en O y radio cualquiera, trazo arco que corta los lados $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ del ángulo dado $\widehat{AOB}$ en P y Q respectivamente.

- Uno P con Q.
- Hallo M punto medio de $\overline{PQ}$.
- Uno O con M y $\overrightarrow{OM}$ es la bisectriz de $\widehat{AOB}$.

Justificación. Como $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ y $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$ y $\overline{OM} \cong \overline{OM}$ entonces

$$\triangle OMP \cong \triangle OMQ,$$

luego

$$\widehat{POM} \cong \widehat{QOM},$$

por lo tanto $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz de $\widehat{AOB}$.

3. Trazar una perpendicular por un punto P de una recta l.

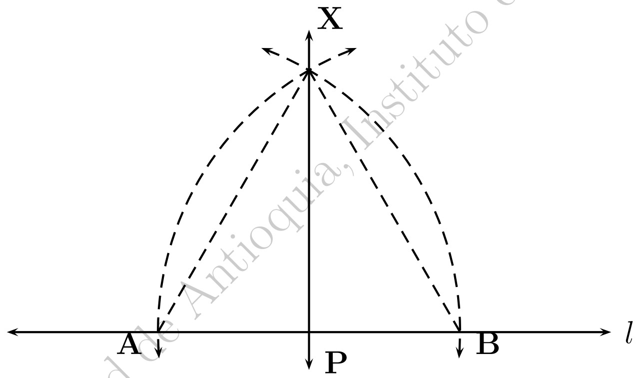


Figura 53.

Construcción. (Ver Figura 53.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en P y radio cualquiera, trazo arco que corta a l en A y B.
- Con centro en A y radio $\overline{AB}$ trazo arco.
- Con centro en B y radio $\overline{AB}$ trazo arco que corta al anterior arco en X.
- Uno P con X y $\overleftrightarrow{XP}$ es perpendicular a l.

Justificación. Como $\overline{AX} \cong \overline{BX}$ entonces el $\triangle XAB$ es isósceles, y como P es punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{XP}$ es mediana y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, $\overline{XP}$ es altura, luego $\overleftrightarrow{XP} \perp l$.

4. Trazar una perpendicular por un punto P exterior a una recta l.

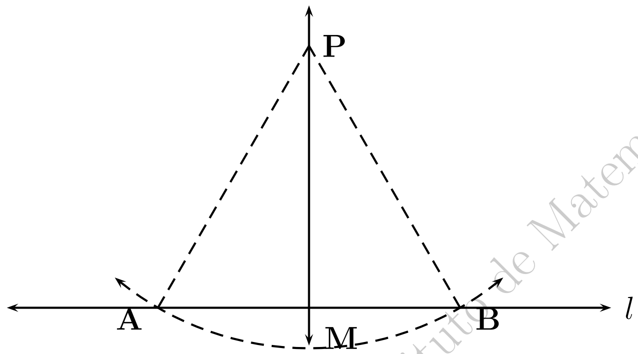


Figura 54.

Construcción. (Ver Figura 54.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en P y radio suficientemente grande trazo arco que corta a l en A y B.
- Hallo M punto medio de $\overline{AB}$.
- Uno P con M y $\overleftrightarrow{PM} \perp l$.

Justificación. Como $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ entonces el $\triangle PAB$ es isósceles, y como M es punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{PM}$ es mediana y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, $\overline{PM}$ es altura, luego $\overleftrightarrow{PM} \perp l$.

5. Construir un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido.

Datos: a, $\widehat{\beta}$, c
Construcción. (Ver Figura 55.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

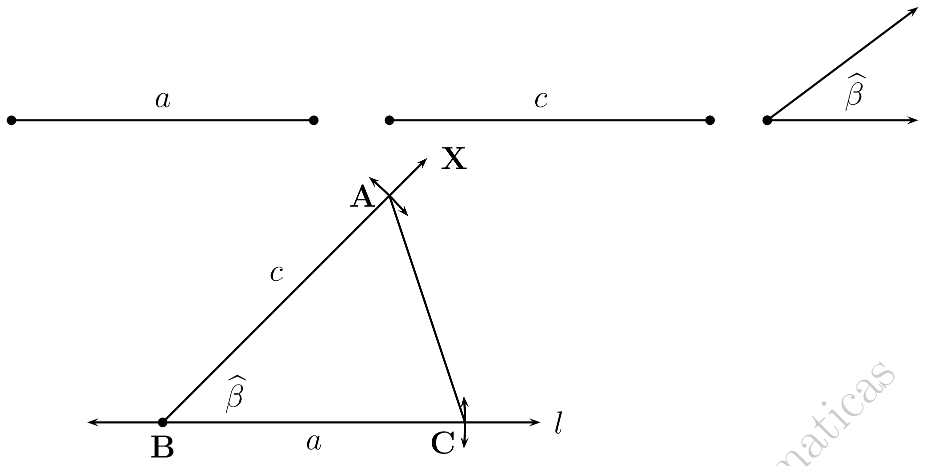


Figura 55.

- Sobre una recta l fijo un punto B.
- Con centro en B y radio a trazo arco que corta a l en C.
- Con vértice B y lado $\overrightarrow{BC}$ trazo el ángulo $\widehat{\beta}$, lo cual produce la semirrecta $\overrightarrow{BX}$.
- Con centro en B y radio c trazo arco que corta a $\overrightarrow{BX}$ en A.
- Uno A con C, el $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

Justificación. Esta construcción esta respaldada en el axioma L-A-L.

6. Construir un triángulo dados dos ángulos y un lado adyacente a los ángulos.

Datos: $\widehat{\beta}$, a, $\widehat{\gamma}$
Construcción. (Ver Figura 56.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Sobre una recta l fijo un punto B.
- Con centro en B y radio a trazo arco que corta a l en C.
- Con vértice B y lado $\overrightarrow{BC}$ trazo el ángulo $\widehat{\beta}$, lo cual produce la semirrecta $\overrightarrow{BX}$.
- Con vértice C y lado $\overrightarrow{CB}$ trazo el ángulo $\widehat{\gamma}$, lo cual produce la semirrecta $\overrightarrow{CY}$, esta semirrecta corta a la semirrecta $\overrightarrow{BX}$ en A.

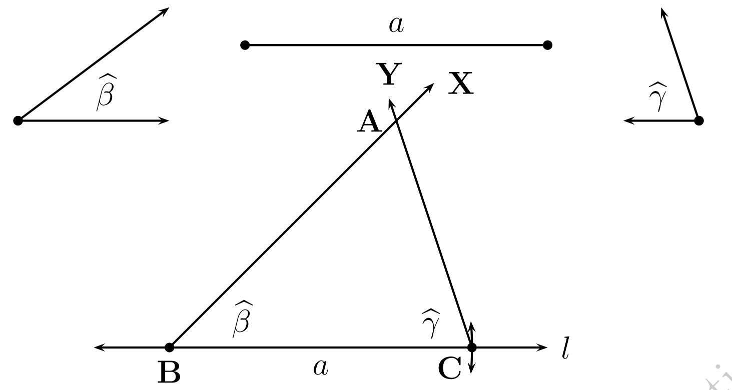


Figura 56.

- El $\triangle ABC$ es el triángulo pedido.

Justificación. Esta construcción esta respaldada en el teorema A-L-A.

3.5. Ejercicios y Problemas del Capít. 3.

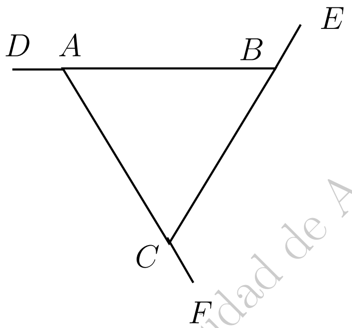
1. Dados dos puntos O y Q en un plano α, existen en el plano α un número indeterminado de puntos P que satisfacen la congruencia $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$.

2. Si A, B, E, F son colineales y $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ entonces $\overline{AE} \cong \overline{BF}$.

3. Si $A - B - C$ y $A' - C' - B'$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ entonces $\overline{AB} < \overline{A'B'}$.

4. Dado el triángulo $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, sea D un punto en la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ en el orden $A-B-D$ y sea E un punto en la semirrecta $\overrightarrow{AC}$ en el orden $A-C-E$. Si $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto F y $\widehat{BAF} \cong \widehat{CAF}$ entonces los triángulos $\triangle DBF$ y $\triangle ECF$ son congruentes.

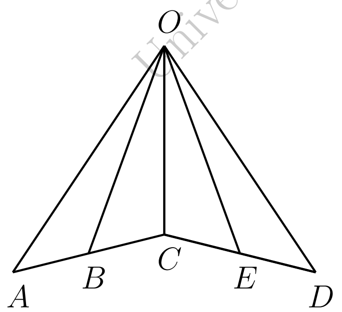
5. Dado el $\triangle ABC$, sean X, Y, Z puntos en el exterior del triángulo tales que $\triangle AXB$, $\triangle AYC$ y $\triangle BZC$ son equiláteros. Demostrar que $\overline{XC} \cong \overline{YB} \cong \overline{ZA}$. (Ayuda: suponer que los ángulos en todos los triángulos equiláteros son congruentes)



6. Se prolongan los lados de un triángulo equilátero $\triangle ABC$ como se indica en la figura. Si

$$\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$$

demostrar que D, E, F son los vértices de otro triángulo equilátero.

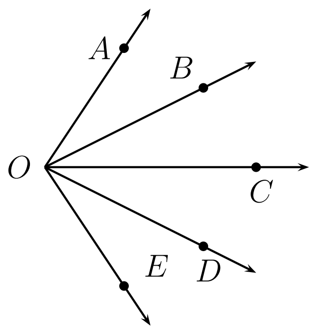


7. Observe la figura y considere como hipótesis las siguientes proposiciones: $\widehat{AOB} \cong \widehat{DOE}$; B está entre A y C, E está entre D y C, $\overline{AC} \cong \overline{DC}$, $\overline{OA} \cong \overline{OD}$. Demuestre que: $\widehat{A} \cong \widehat{D}, \overline{OB} \cong \overline{OE}, \overline{BC} \cong \overline{CE}$ y $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz de $\widehat{DOA}$.

8. Sea P un punto en el interior de un triángulo $\triangle ABC$ tal que la recta $\overleftrightarrow{AP}$ corta a $\overline{BC}$ en M y la recta $\overleftrightarrow{PC}$ corta a $\overline{AB}$ en N. Si $\overline{PM} \cong \overline{PN}$ y $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, demostrar que el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles.

9. En el triángulo $\triangle ABC$ equilátero se toma D entre A y B; E entre B y C y F entre A y C, con $\overline{AD} \cong \overline{BE} \cong \overline{CF}$, demostrar que el triángulo $\triangle DEF$ es equilátero.

10. Con un segmento $\overline{BC}$ como lado común, se trazan dos triángulos congruentes $\triangle BAC$ y $\triangle BDC$ con A y D en el mismo lado con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y de manera que $\overline{BD}$ y $\overline{CA}$ se cortan en O. Demostrar:
a.) El $\triangle DOC \cong \triangle AOB$.
b.) El $\triangle BOC$ es isósceles.



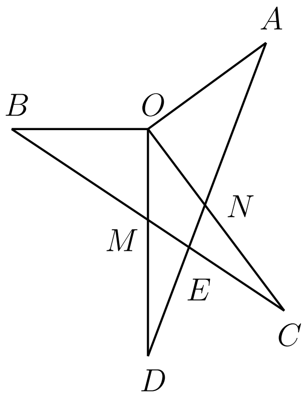
11. En la figura, la semirrecta $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz de los ángulos $\widehat{BOD}$ y $\widehat{AOE}$, $\overline{OA} \cong \overline{OE}$, $\overline{OB} \cong \overline{OD}$. Demostrar que:
a.) $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOE}$, $\overline{AD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AB} \cong \overline{ED}$.
b) Demostrar que si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{ED}$ se cortan en I, entonces I es un punto de $\overleftrightarrow{OC}$

12. En un triángulo $\triangle ABC$, con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ se toma un punto E en la prolongación de $\overline{AB}$ a partir de B y un punto D en la prolongación de $\overline{AC}$ a partir de C y de tal manera que $\overline{BE} \cong \overline{CD}$, se une B con D y E con C que se cortan en Q. Demostrar que:
$\overline{DB} \cong \overline{CE}$, $\quad \overline{QD} \cong \overline{QE}$, $\quad \widehat{QAB} \cong \widehat{QAC}$.

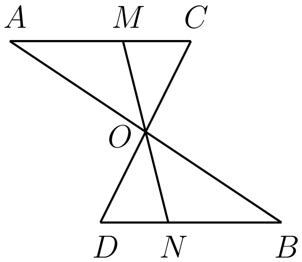
13. Dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ tales que $\overline{AC} \cong \overline{MP}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ y la mediana $\overline{AD}$ es congruente con la mediana $\overline{MQ}$ entonces el $\triangle ABC \cong \triangle MNP$.

14. En un triángulo isósceles $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, sea $\overline{AM}$ la mediana relativa a la base, sea $P \in \overrightarrow{MA}$, sea $D \in \overline{PB} \cap \overrightarrow{CA}$ y $E \in \overline{PC} \cap \overrightarrow{BA}$. Demostrar que si $T \in \overrightarrow{AP}$ entonces $\overline{TD} \cong \overline{TE}$.

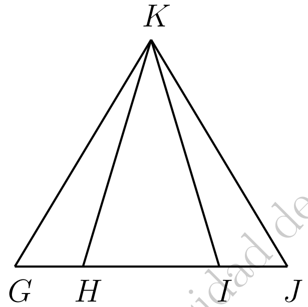
15. En los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ son bisectrices de $\widehat{BAC}$ y $\widehat{B'A'C'}$ respectivamente. Si $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$ y $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ entonces $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



16. En la figura tenemos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ forman ángulo recto, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ forman ángulo recto, $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, $\overline{OC} \cong \overline{OD}$. Demostrar que: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\widehat{B} \cong \widehat{A}$, $\triangle MDE \cong \triangle NCE$.

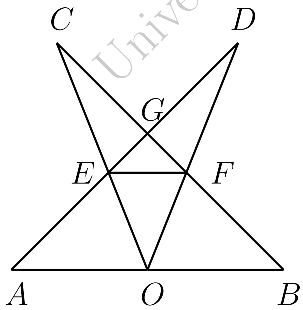


17. En la figura, O es punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; demostrar que:
$\widehat{A} \cong \widehat{B}$, $\overline{MC} \cong \overline{DN}$, $\overline{OM} \cong \overline{ON}$.

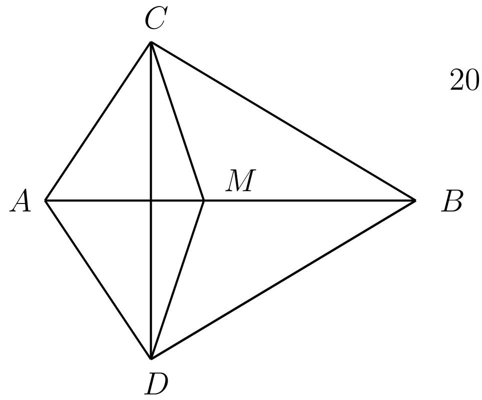


18. En la figura se tiene $\overline{HK} \cong \overline{IK}$, $\overline{GH} \cong \overline{IJ}$, probar que:

$$\overline{GK} \cong \overline{JK}, \quad \widehat{GKH} \cong \widehat{IKJ}.$$

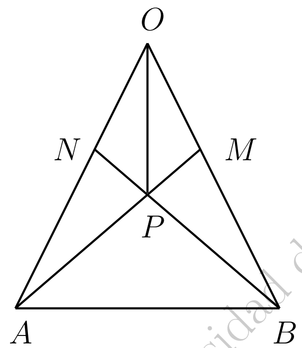


19. En la figura se tiene O punto medio de $\overline{AB}$; $\widehat{AOD} \cong \widehat{BOC}$; $\widehat{A} \cong \widehat{B}$. Demostrar que $\overline{OD} \cong \overline{OC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\widehat{C} \cong \widehat{D}$, $\triangle EOF$ es isósceles, $\triangle EGF$ es isósceles.



20. En la figura se tiene que $\overline{AB}$ es bisectriz de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$; M esta entre A y B, C y D en semiplanos opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$. Demostrar que: $\triangle CAD$ es isósceles, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{MC} \cong \overline{MD}$, $\widehat{MCD} \cong \widehat{MDC}$

21. Probar que si en un triángulo $\triangle ABC$:
a.) $\overline{AD}$ es a la vez mediana y altura, entonces $\triangle ABC$ es isósceles.
b.) $\overline{AD}$ es a la vez bisectriz y altura, entonces $\triangle ABC$ es isósceles.
c) Podría decirse que el triángulo es isósceles si la bisectriz es a la vez mediana? !justifique!.

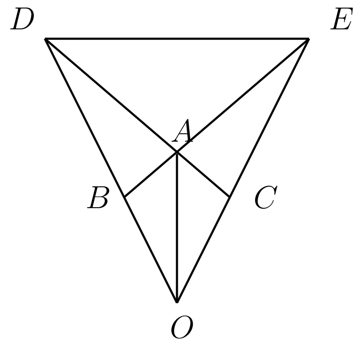


22. Si N esta entre O y A, M esta entre O y B; $\overline{AM} \bigcap \overline{BN} = \{P\}$; $\overline{PN} \cong \overline{PM}$; $\overline{AP} \cong \overline{PB}$.
Demuestre que:
i) $\triangle OAB$ es isósceles.
ii) $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz de $\widehat{AOB}$

23. En un triángulo $\triangle ABC$; $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Se trazan las medianas $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ relativas a los lados congruentes, los cuales se cortan en el punto I.
a) Demuestre que $\triangle BIC$ y $\triangle DIE$ son isósceles.
b) Comparar $\triangle BIE$ y $\triangle DIC$.
c) Mostrar que los puntos A, I y los puntos medios de $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$ son colineales.

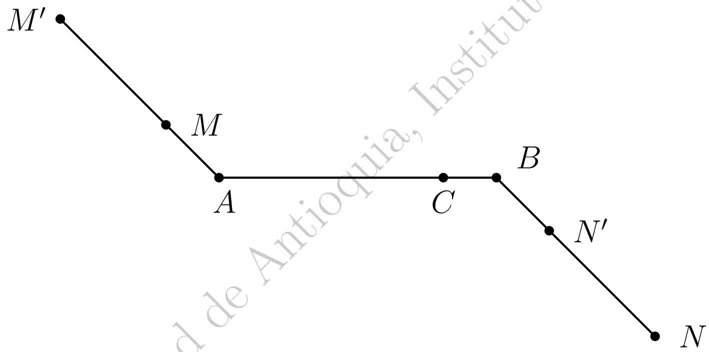
24. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice forman semirrectas opuestas.

25. Demostrar que si dos rectas se cortan, las bisectrices de los cuatro ángulos forman dos rectas perpendiculares.



26. En la figura $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{AE}$. Demostrar que $\overline{OA}$ es bisectriz de $\widehat{DOE}$.

27. Sea C un punto en el interior de un segmento $\overline{AB}$, desde A y B se trazan semirrectas a lado y lado de $\overline{AB}$ que hacen ángulos congruentes con $\overline{AB}$ como lo indica la figura. Sobre estas semirrectas se toman M, M', N, N' tales que: $\overline{AM} \cong \overline{CB} \cong \overline{BN'}$ y $\overline{BN} \cong \overline{AC} \cong \overline{AM'}$. Demostrar: $\overline{MC} \cong \overline{NC}$, $\quad \overline{AN} \cong \overline{BM'}$, $\quad \overline{AN'} \cong \overline{BM}$, $\widehat{BAN'} \cong \widehat{ABM}$



28. En un triángulo $\triangle ABC$ se traza la bisectriz $\overrightarrow{AD}$ del ángulo $\widehat{BAC}$. Se toma en $\overrightarrow{AD}$ los puntos E y F tales que $\overline{AE} \cong \overline{AB}$ y $\overline{AF} \cong \overline{AC}$. Demostrar que $\overline{BF} \cong \overline{CE}$.

29. Por un punto M de la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$ se trazan dos rectas que hacen ángulos congruentes con $\overrightarrow{AM}$, una de estas rectas corta los lados de $\widehat{A}$ en los puntos B y C respectivamente y la otra en los puntos D y E de tal manera que B y D quedan sobre uno de los lados de $\widehat{A}$. Demostrar que $\overline{ME} \cong \overline{MB}$, $\quad \overline{MC} \cong \overline{MD}$ y $\quad \overline{ED} \cong \overline{BC}$.

30. Para los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene que $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y las bisectrices $\overline{BE} \cong \overline{B'E'}$. Mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Construcciones con regla y compás.

31. Construir un triángulo rectángulo dados los dos catetos.

32. Construir un triángulo rectángulo dado un cateto y un ángulo agudo adyacente al cateto.

33. Construir un triángulo rectángulo dado un cateto y un ángulo agudo opuesto al cateto.

34. Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.

35. Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un ángulo agudo.

36. Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la bisectriz del ángulo agudo adyacente al cateto.

37. Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la mediana relativa al cateto.

38. Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la mediana relativa al otro cateto.

39. Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y la altura relativa a la hipotenusa.

40. Construir un triángulo isósceles dada la base y la altura. Justificar la construcción.

41. Construir un triángulo isósceles dada la base y un ángulo de la base.

42. Construir un triángulo isósceles dado un ángulo de la base y la altura.

43. Construir un triángulo isósceles dado el lado congruente y el ángulo del vértice.

44. Construir un triángulo rectángulo dada la bisectriz del ángulo recto y la altura relativa a la hipotenusa.

45. Construir un triángulo isósceles dado uno de los lados congruentes y la altura relativa a este lado.

46. Construir un triángulo isósceles dada la magnitud de los dos lados congruentes y la altura relativa a la base.

47. Construir un triángulo rectángulo dada la bisectriz del ángulo recto y un cateto.

48. Construir un triángulo isósceles dado uno de los lados congruentes y la mediana relativa a este lado.

49. Construir un triángulo isósceles dada la base y la altura relativa a uno de los lados congruentes .

50. Construir un triángulo isósceles dada la base y el ángulo opuesto a la base .

CAPÍTULO 4

AXIOMAS DE CONTINUIDAD Y DE PARALELISMO

4.1. AXIOMAS DE CONTINUIDAD

Los axiomas de continuidad permiten, eligiendo una unidad lineal o segmento lineal, definir, para cada segmento, de manera única un número real no negativo llamado longitud del segmento (Axioma de Arquímedes) y recíprocamente determinar la existencia de un segmento cuya longitud sea igual a un número real no negativo dado. (Axioma de Cantor).

IV.1 Axioma de Arquímedes
Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ segmentos arbitrarios. Entonces sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ situados de manera que A_1 está entre A y A_2, A_2 está entre A_1 y A_3 y así sucesivamente, tales que los segmentos $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ son congruentes a $\overline{CD}$ y B está entre A y A_n, (Ver Figura 1.).

IV.2 Axioma de Cantor
Si en una recta cualesquiera a se tiene un número cualesquiera de segmentos $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$,..., de los cuales cada uno esta en el interior del anterior. Suponemos además que cualquiera que sea un segmento prefijado $\overline{EF}$, existe un número n tal que el segmento $\overline{A_nB_n}$ es menor que

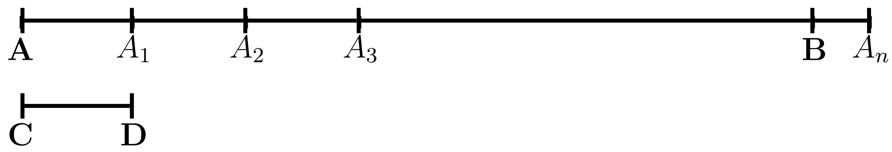


Figura 1.

$\overline{EF}$. Entonces existe un punto $X \in a$ que esta en el interior de todos los segmentos.
Como consecuencia del anterior axioma, Cantor demostró que los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los puntos de un segmento y a su vez los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales.

Teorema 31.
Para cualquier número real $x > 0$, existe un segmento cuya longitud es x.

A continuación, utilizando el axioma de Arquímedes, analizaremos el proceso de medición que consiste en asignar un número real a un segmento dado.

Sea $\overline{AB}$ cualquier segmento y $\overline{CD}$ un segmento que se fija arbitrariamente como unidad, al cual asignaremos como longitud el número real uno. Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ se van superponiendo segmentos congruentes a $\overline{CD}$ de tal manera que se obtienen los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ y el punto B está entre A y P_{n+1}, (ver Figura 2.).

Figura 2.

Puesto que $\overline{AP_1} \cong \overline{CD}$, $\overline{P_1P_2} \cong \overline{CD}, \ldots, \overline{P_nP_{n+1}} \cong \overline{CD}$, entonces lo que se ha hecho es recubrir el segmento $\overline{AB}$ utilizando un segmento unidad .

Puede ocurrir que P_n coincida con B. Aquí el segmento unidad está en $\overline{AB}$ exactamente n veces, (ver Figura 3.).

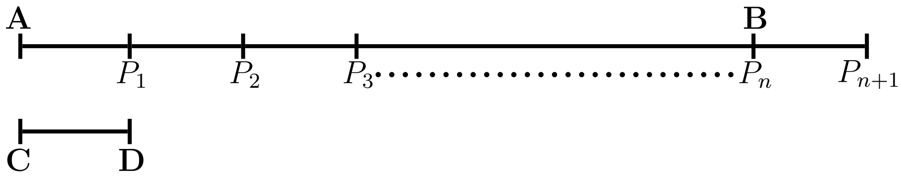


Figura 3.

Entonces definimos la longitud del segmento $\overline{AB}$ como el número real n y terminamos el proceso de medición. Pero puede ocurrir que P_n no coincida con B. En dicho caso B estará entre P_n y P_{n+1} y por tanto la longitud del segmento $\overline{AB}$ está comprendido entre n y $n+1$, (ver Figura 4.).

Figura 4.

Si la longitud del segmento es a, entonces $n < a < n+1$. Ahora bien, podemos seguir el proceso de subdivisiones para aproximarnos cada vez más a la medida de $\overline{AB}$. Si q_1 es el punto medio de $\overline{P_nP_{n+1}}$ (sabemos que todo segmento tiene punto medio), puede ocurrir que:
1. q_1 coincida con B
2. q_1 esté entre P_n y B
3. q_1 esté entre B y P_{n+1}

Los tres casos se ilustran en la Figura 5.

En el primer caso $a = n + \frac{1}{2}$ y termina el proceso de medición.
En el segundo caso $n + \frac{1}{2} < a < n+1$. No termina el proceso de medición.
En el tercer caso $n < a < n + \frac{1}{2}$. No termina el proceso de medición.

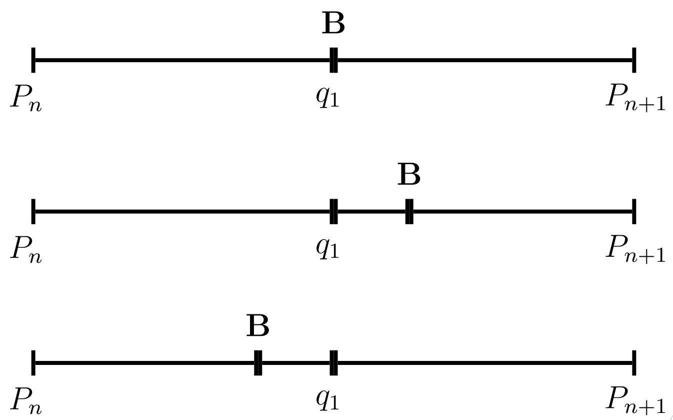


Figura 5.

Para los casos dos y tres se puede continuar el proceso tomando los puntos medios de $\overline{\mathrm{q}_1 P_{n+1}}$ ó $\overline{P_n \mathrm{q}_1}$ según donde se encuentre B. Puede ocurrir que B coincida con uno de estos puntos medios y en este caso $a = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ ó bien $a = n + \frac{1}{4}$. En caso contrario, el proceso continúa.

Mediante este proceso se obtiene, en cada paso, un valor más próximo a la longitud de $\overline{AB}$ y eventualmente puede obtenerse en un número finito de pasos el valor exacto de dicha longitud. Es posible demostrar que cuando el proceso se extiende indefinidamente, se obtiene el valor exacto de la longitud de $\overline{AB}$.

El proceso que se ha descrito anteriormente se llama de MEDICIÓN y el número encontrado es la medida del segmento $\overline{AB}$ o la longitud de $\overline{AB}$ que denotamos por: $m(\overline{AB})$ ó AB.

Dicho proceso lo podemos precisar con la siguiente definición.

Definición 24 (Medida de segmentos). *La medida de segmentos es una función que asigna a cada segmento un número real no negativo, tal que:*

1. Para un segmento $\overline{CD}$, fijado arbitrariamente, $m(\overline{CD}) = CD = 1$, ($\overline{CD}$ es llamado segmento unitario).

2. $m(\overline{AB}) = m(\overline{A_1B_1})$ (o $AB = A_1B_1$), si y solo si $\overline{AB} \cong \overline{A_1B_1}$, (dos *segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida).*

3. Si B está entre A y C, entonces: $m\,(\overline{AC}) = m\,(\overline{AB}) + m\,(\overline{BC})$ *(o* $AC = AB + BC$*), (ver Figura 6.)*

4. $m\,(\overline{AB}) = AB = 0$ *síi A coincide con B.*

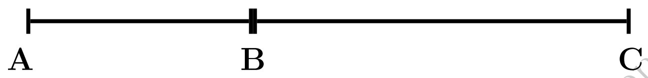


Figura 6.

4.2. MEDIDA DE ÁNGULOS

En forma análoga a lo dicho para la medida de segmentos, existe un proceso para la medición de ángulos.

Denotaremos la medida del ángulo $\widehat{ABC}$ por $m\,\widehat{ABC}$.

Definición 25 (Medida de ángulos). *La medida de ángulos es una función que asigna a cada ángulo un número real no negativo tal que:*

1. Para un ángulo $\widehat{PQR}$, fijado arbitrariamente, $m\,(\widehat{PQR}) = 1$, *($\widehat{PQR}$ es llamado ángulo unitario).*

2. $m\,(\widehat{ABC}) = m\,(\widehat{A_1B_1C_1})$ *sii* $\widehat{ABC} \cong \widehat{A_1B_1C_1}$

3. Si $\widehat{BAC}$ y $\widehat{CAD}$ son ángulos adyacentes y $\overrightarrow{AC} \subset Int\widehat{BAD}$ (ver Figura 7.), entonces:

$$m\,(\widehat{BAC}) + m\,(\widehat{CAD}) = m\,(\widehat{BAD})$$

4. $m(\widehat{AOB}) = 0$ si y solo si $\overrightarrow{OA} \equiv \overrightarrow{OB}$

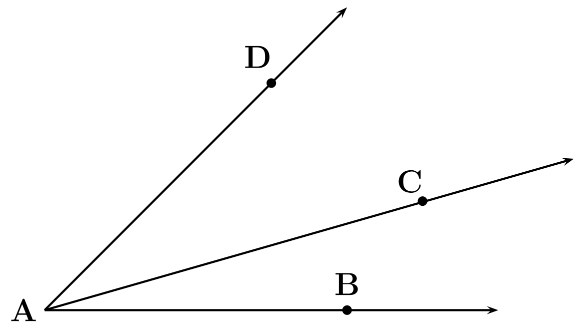


Figura 7.

Según el **Teorema 23**, todos los ángulos rectos son congruentes y por lo tanto, utilizando la propiedad 2, tienen la misma medida. Podemos entonces, emplear como unidad de medida angular una noventava parte del ángulo recto ($\frac{1}{90}$). Dicha unidad de medida la llamaremos grado.

Con esta unidad de medida, cualquier ángulo tiene una medida entre 0 y 180 grados.

La medida del ángulo nulo será 0 y la del ángulo llano será de 180. Análogamente como en segmentos, es posible demostrar que dado un número real α entre 0 y 180, se puede construir un ángulo cuya medida sea α.

Observaciones:
1. En cada segmento existen puntos que lo dividen en n segmentos congruentes.

2. En cada ángulo, por su vértice, pasan semirrectas que lo dividen en n ángulos congruentes.

3. $\overline{AB} > \overline{CD}$, si y solo si $m\,\overline{AB} > m\,\overline{CD}$.

4. Si $\widehat{ABC} > \widehat{A_1B_1C_1}$, si y solo si $m\,(\widehat{ABC}) > m\,(\widehat{A_1B_1C_1})$.

5. Los puntos medios de segmentos congruentes determinan segmentos congruentes.

6. Las bisectrices de ángulos congruentes determinan ángulos congruentes.

7. La medida de un par lineal es constante e igual a la medida de un ángulo llano.

Definición 26. *Dados los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$:*

1. Si $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^0$, diremos que el ángulo $\widehat{A}$ es suplemento del ángulo $\widehat{B}$ ó que $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son suplementarios.

2. Si $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 90^0$, diremos que los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son complementarios.

Teorema 32.

a) *Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.*
b) *Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.*

Demostración. a) Sean $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ ángulos respectivamente suplementarios a los ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ y tales que $\widehat{D} \cong \widehat{E}$.

Por hipótesis: $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^0$ (1)
$m(\widehat{B}) + m(\widehat{E}) = 180^0$ (2)
$m(\widehat{D}) = m(\widehat{E})$ (3)

De (1), (2) y (3) se sigue que : $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ y de aquí se concluye que $\widehat{A} \cong \widehat{B}$.

La parte b) de este teorema se hace en forma análoga a a). ■

Observación:
l. También usaremos para la medida de un ángulo letras griegas como α, β, γ, θ, etc.
2. Abusando de la notación, y entendiendo por el contexto lo que se quiere decir, usaremos indistintamente el ángulo o su medida.

Definición 27 (Rectas Paralelas).
Sean l y r dos rectas dadas contenidas en un mismo plano. Decimos que l es paralela a r, y lo denotamos como $l \parallel r$, si:
i) l es la misma recta r ó
ii) l es diferente a r y $l \cap r = \phi$

Definición 28 (Ángulos alternos internos). *Dadas dos rectas distintas y coplanares cualesquiera cortadas en puntos distintos por una secante, se llaman ángulos* ***alternos internos*** *aquellos que:*

1. *Tienen sus vértices en estos puntos distintos.*

2. *El segmento cuyos extremos son los puntos distintos, es común a los dos ángulos.*

3. *Sus interiores estan en semiplanos opuestos con respecto a la recta secante.*

4. *No son adyacentes.*

En la Figura 8.: los ángulos $\widehat{A'B'B}$ y $\widehat{B'BC}$ son alternos internos.

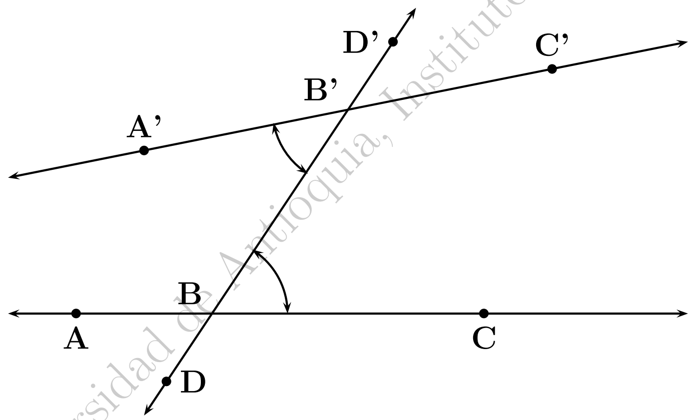


Figura 8.

Dadas dos rectas distintas y coplanares cortadas en puntos distintos por una secante, los ángulos que tienen sus vértices en estos puntos distintos, sus interiores están del mismo lado respecto a la secante y uno de los lados que esta sobre la secante contiene al lado del otro ángulo, se les llama **ángulos correspondientes**.

Dadas dos rectas distintas y coplanares cortadas en puntos distintos por una secante, los ángulos que tienen sus vértices en estos puntos distintos, sus interiores están a un mismo lado de la secante y son adyacentes al segmento común cuyos extremos son los puntos distintos, se les llaman **ángulos interiores.**

En la Figura 8.: los ángulos $\widehat{D'B'C'}$ y $\widehat{B'BC}$ son correspondientes y los ángulos $\widehat{C'B'B}$ y $\widehat{CBB'}$ son ángulos interiores.

Teorema 33 (**Teorema de ángulos alternos internos).**

Si dos rectas distintas coplanares cortadas por una secante en puntos distintos, hacen con ella una pareja de ángulos alternos internos congruentes, entonces son paralelas.

Demostración: sean l y r las rectas coplanares dadas, l diferente de r y sea t una recta que corta a l y r en puntos B y B' respectivamente y de modo que: $\widehat{A'B'B} \cong \widehat{CBB'}$

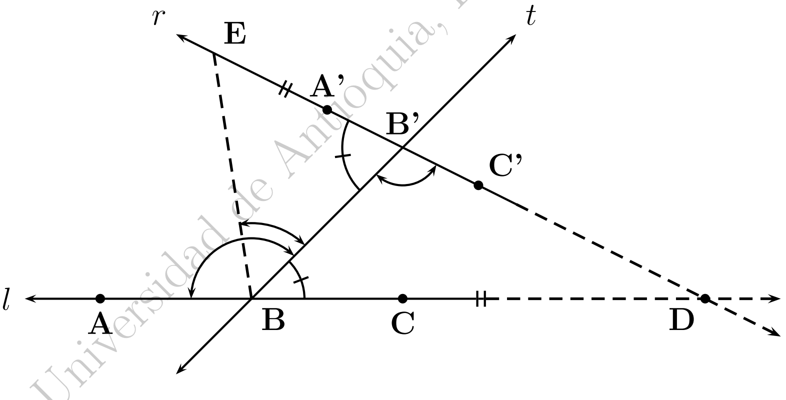


Figura 9.

Vamos a demostrar que $l \parallel r$, o lo que es lo mismo $l \cap r = \phi$. Razonemos por reducción al absurdo, esto es, supongamos que los ángulos alternos internos son congruentes y que l no es paralela a r.

Entonces se cortarán en un punto D. Podemos suponer que se cortan en el mismo semiplano respecto a t en que están C y C', (ver Figura 9.).

Consideremos el triángulo $\triangle BB'D$. Como $\widehat{A'B'B} \cong \widehat{CBB'}$ (hipótesis), entonces, por el teorema del par lineal (**Teorema 14**) $\widehat{BB'D} \cong \widehat{B'BA}$ (1). Ahora, por el axioma de construcción de segmentos, existe E en la semirrecta $\overrightarrow{B'A'}$ tal que $\overline{B'E} \cong \overline{BD}$. Unamos B con E. Los triángulos $\triangle BB'D$ y $\triangle BB'E$ son congruentes (L-A-L), de donde:

$$\widehat{EBB'} \cong \widehat{BB'D}$$

pero $\widehat{BB'D} \cong \widehat{B'BA}$ por (1). Luego, $\widehat{EBB'} \cong \widehat{B'BA}$

Y como $\overrightarrow{BE}$ y $\overrightarrow{BA}$ están en el mismo semiplano respecto a t, por el axioma de construcción del ángulo $\overrightarrow{BE} \equiv \overrightarrow{BA}$, lo que nos dice a la vez que $E \in \overrightarrow{BA}$, es decir, E pertenece a la recta l . Pero también $D \in l$. Luego $l \equiv \overleftrightarrow{DE}$ y como la recta $\overleftrightarrow{DE}$ es la misma r, se tiene finalmente que $r \equiv l$. Contradicción con la hipótesis ya que habíamos supuesto que l y r eran dos rectas diferentes. ■

Corolario 9. *Si dos rectas distintas y coplanares, cortadas por una secante en puntos distintos, forman con ella ángulos correspondientes congruentes, entonces son paralelas.*

Corolario 10. *Dos rectas distintas y coplanares, perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.*

Demostración: (ver Figura 10.), sean $l \perp t$ y $r \perp t$. Demostremos que $l \parallel r$.

Como $l \perp t$, entonces $\widehat{ABB'}$ es recto.
Como $r \perp t$, entonces $\widehat{A'B'B}$ es recto y por lo tanto su ángulo adyacente $\widehat{C'B'B}$ es recto. Así que $\widehat{ABB'} \cong \widehat{C'B'B}$ por ser ambos rectos. Se sigue entonces que la secante t hace con las rectas l y r ángulos alternos internos congruentes, luego por el teorema de ángulos alternos internos, $l \parallel r$. ■

Construcción básica: por un punto P exterior a una recta l trazar una paralela a la recta.
Datos: l, P.
Construcción. (Ver Figura 11.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Con centro en P y radio suficientemente grande trazo arco que corta a l en X.
- Con centro en X y el mismo radio trazo arco que corta a l en Y.

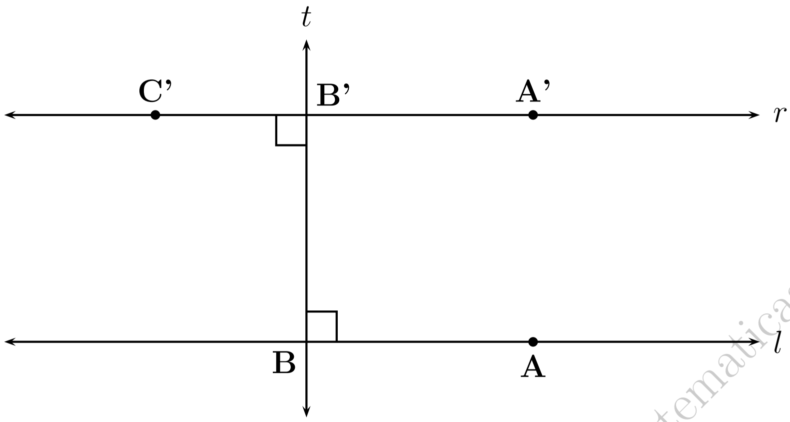


Figura 10.

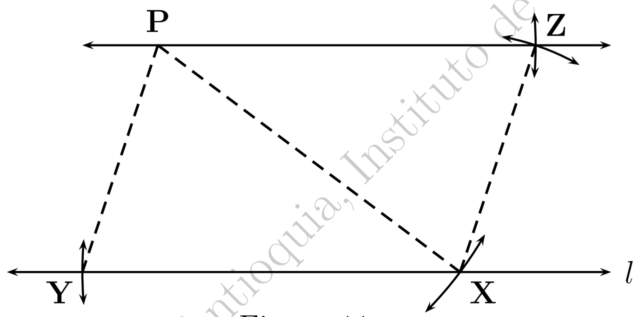


Figura 11.

- Con centro X y radio $\overline{YP}$ trazo arco.
- Con centro en P y radio $\overline{YX}$ trazo arco que corta al anterior arco en Z.
- Uno P con Z y $\overleftrightarrow{PZ} \parallel l$.

Justificación. Como $\overline{YX} \cong \overline{PZ}$, $\overline{YP} \cong \overline{XZ}$ y $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ entonces

$$\triangle PYX \cong \triangle PZX$$

luego

$$\widehat{ZPX} \cong \widehat{PXY}$$

y por tanto $\overleftrightarrow{PZ} \parallel \overleftrightarrow{YX}$.

Definición 29 (**Angulo exterior a un triángulo).** *El ángulo que hace par lineal con un ángulo interior de un triángulo se le llama ángulo exterior del triángulo.*

Teorema 34 (**Teorema del ángulo exterior. T. $\measuredangle$ E).**

Todo ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes.

Demostración. (Ver Figura 12.). En un triángulo $\triangle ABC$ consideremos el ángulo exterior $\widehat{ACD}$. Dicho ángulo es adyacente al ángulo $\widehat{C}$ del triángulo.

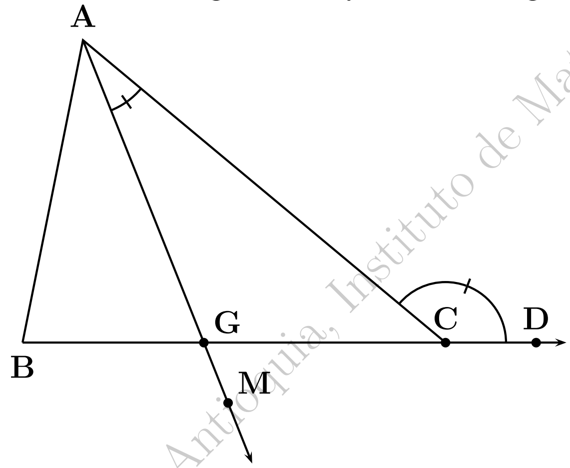


Figura 12.

Vamos a demostrar:

i) $\widehat{A} < \widehat{ACD}$

ii) $\widehat{B} < \widehat{ACD}$

Veamos i). Basta demostrar que no puede darse que:

$$\widehat{ACD} < \widehat{A} \quad y \quad \widehat{ACD} \cong \widehat{A}$$

a) Supongamos que $\widehat{ACD} < \widehat{A}$. Entonces existe una semirrecta $\overrightarrow{AM}$ en el interior de $\widehat{BAC}$ y tal que $\widehat{ACD} \cong \widehat{CAM}$.

Ahora como $\overrightarrow{AM}$ está en el interior de $\widehat{BAC}$, por el Teorema de la Barra Transversal, $\overrightarrow{AM}$ corta a $\overline{BC}$ en un punto G, G entre B y C.

Consideremos las rectas $\overleftrightarrow{AG}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y la secante $\overleftrightarrow{AC}$. Como $\widehat{ACD} \cong \widehat{CAG}$ y $\widehat{ACD}$ y $\widehat{CAG}$ son ángulos alternos internos, entonces por el Teorema de los ángulos alternos internos, $\overleftrightarrow{CD} \| \overleftrightarrow{AG}$, contradicción ya que $\overline{CD}$ y $\overline{AG}$ se cortan en G.

b) Supongamos ahora que $\widehat{ACD} \cong \widehat{A}$, (ver Figura 13.)

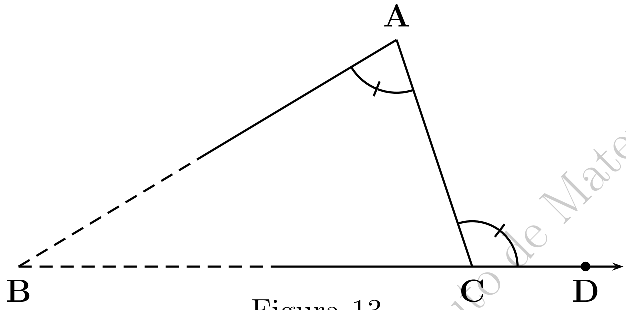


Figura 13.

Si consideramos las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ y la secante $\overleftrightarrow{AC}$, como $\widehat{ACD} \cong \widehat{A}$, por Teorema de los ángulos alternos internos, se tendría que:
$\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$. Contradicción, ya que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan en B.

Con a) y b) queda demostrado i).

ii) La prueba de que $\widehat{B} < \widehat{ACD}$ es completamente similar y se deja como ejercicio. ■

Corolario 11. *En todo triángulo rectángulo, los ángulos interiores diferentes del ángulo recto son agudos.*

Demostración. (Ver Figura 14.). $\widehat{ABD}$ es ángulo exterior al triángulo $\triangle ABC$. Luego $\widehat{C} < \widehat{ABD}$ pero $\widehat{ABD} \cong \widehat{ABC}$, de donde se concluye que: $\widehat{C} < \widehat{ABC}$. De la misma manera se demuestra que el ángulo $\widehat{A} < \widehat{ABD}$. ■

Teorema 35.

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una perpendicular a la recta y sólo una.

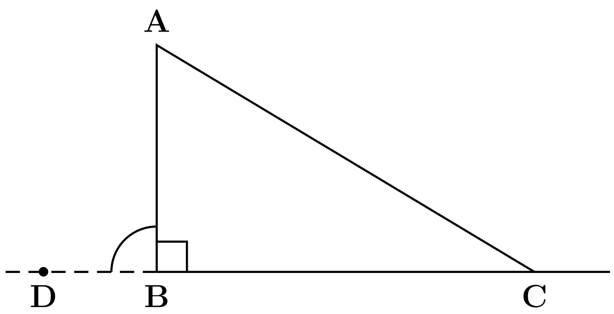


Figura 14.

Demostración. 1. <u>Existencia</u>:
Sea $P \notin l$. Tomemos A y B en l, unimos P con A y consideremos el ángulo $\widehat{PAB}$.

Por el axioma de construcción del ángulo, existe $\overrightarrow{AM} \subset \Pi_{l:\,\neg P}$ y tal que:

$$\widehat{PAB} \cong \widehat{BAM}$$

Con $\overrightarrow{AM}$ puede ocurrir:
i) Que sea opuesta a $\overrightarrow{AP}$.
ii) Que no sea opuesta a $\overrightarrow{AP}$.

i) Si $\overrightarrow{AM}$ es opuesta a $\overrightarrow{AP}$, entonces el ángulo $\widehat{PAB}$ es recto ya que $\widehat{PAB}$ y $\widehat{BAM}$ forman par lineal y son congruentes. Por lo tanto $\overleftrightarrow{AP} \perp l$ y pasa por P, (ver Figura 15.).

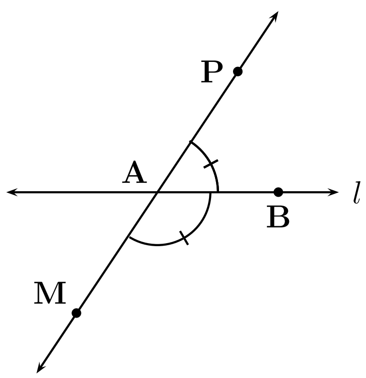


Figura 15.

ii) Supongamos ahora que $\overrightarrow{AM}$ no es opuesta a $\overrightarrow{AP}$, (Figura 16.). Tomemos sobre $\overrightarrow{AM}$ el punto T de modo que $\overline{AT} \cong \overline{AP}$. Es claro que P y T están en semiplanos opuestos respecto a la recta l. Por tanto, $\overline{PT}$ corta a l en Q. con el punto Q pueden ocurrir tres casos: a) Q, B estan del mismo lado de

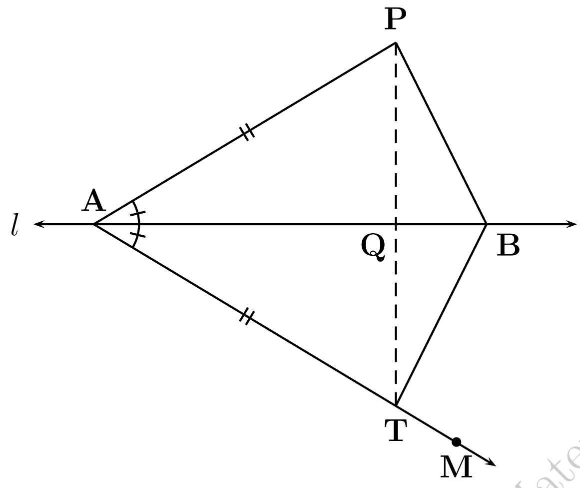


Figura 16.

A, b) $Q \equiv A$, este caso fue el que se demostró en i), c) $Q - A - B$.
Caso a) Como $\triangle PAQ \cong \triangle TAQ$ (L-A-L). Luego

$$\widehat{PQA} \cong \widehat{TQA} \quad y \quad \widehat{TQA} \cong \widehat{PQB}$$

por opuestos por el vértice. O sea que: $\widehat{PQA} \cong \widehat{PQB}$.
De donde $\widehat{PQB}$ es recto, entonces se tiene que la recta $\overleftrightarrow{PT}$ es perpendicular a la recta l.
Se deja como ejercicio demostrar el caso c).
2. <u>Unicidad</u>, (ver Figura 17.).

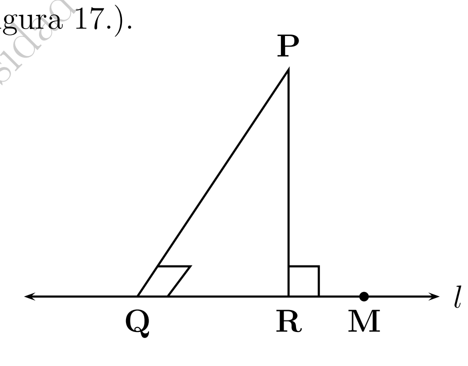


Figura 17.

Supongamos que por P se pueden trazar dos perpendiculares distintas $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PR}$ a l. Consideremos el triángulo $\triangle PQR$. Como $\widehat{PRM}$ y $\widehat{PQR}$ son rectos, entonces $\widehat{PRM} \cong \widehat{PQR}$. Contradicción ya que por el Teorema del ángulo exterior, $\widehat{PQR} < \widehat{PRM}$. ■

Definición 30.
a. **(Distancia de un punto a una recta)** *La medida del segmento perpendicular trazado desde un punto exterior a una recta es llamada* <u>*distancia*</u> *del punto a la recta.*
b. La proyección ortogonal de un punto exterior a una recta, es el punto de intersección de una recta perpendicular desde el punto a la recta.

Teorema 36.

a. Las proyecciones de los puntos de un lado de un ángulo obtuso sobre la recta que contiene al otro lado, estan en la semirrecta opuesta al otro lado.
b. Las proyecciones de los puntos de un lado de un ángulo agudo sobre la recta que contiene al otro lado, estan sobre el otro lado.

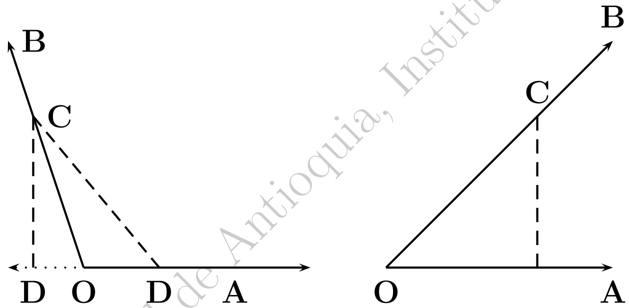


Figura 18.

Demostración. (Ver Figura 18.) Supongamos que $\widehat{AOB}$ es obtuso y sea $\overline{CD} \perp \overrightarrow{OA}$ con $C \in \overrightarrow{OB}$ y $D \in \overleftrightarrow{OA}$; con el punto D pueden suceder tres casos: i). $D \in \overrightarrow{OA}$, ii). $D \equiv O$, iii). D esta en la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{OA}$.
Veamos que los casos i., ii. conducen a un absurdo.
i). Si $D \in \overrightarrow{OA}$ entonces , luego el ΔCOD existe y por el teorema del ángulo exterior en el $\triangle COD$: $\widehat{CDA} > \widehat{COD}$, pero el $\widehat{COD}$ es por hipótesis obtuso y $\widehat{CDA}$ es recto. Absurdo!
ii). Si $D \equiv O$ entonces el $\widehat{COA}$ es a la vez obtuso y recto, Absurdo!
Luego se produce i).: $D - O - A$
b. Este caso se deja como ejercicio. ■

Teorema 37 (Existencia de rectas paralelas).

Por un punto exterior a una recta l se puede trazar una paralela a la recta.

Nota: obsérvese que la proposición asegura que se puede trazar al menos una paralela a la recta dada. Acerca de la unicidad, o sea que esa paralela sea única o no, la proposición no afirma nada.

Demostración. (Ver Figura 19.). Sea $P \notin l$, entonces el punto P y la recta l determinan un plano π. Demostremos que existe una recta $r \subset \pi$ que pasa por P y tal que $r \parallel l$.

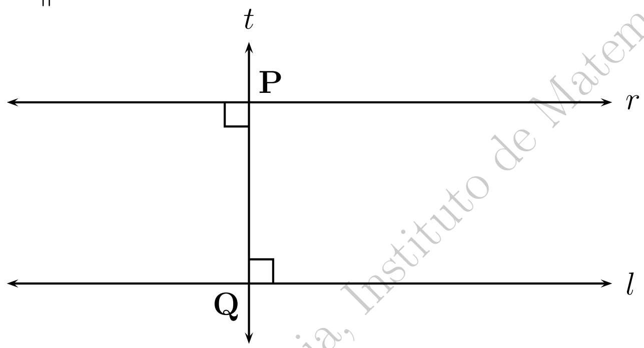


Figura 19.

Sea t la perpendicular a l bajada por P. Por P trazamos la recta r perpendicular a t. Entonces $r \parallel l$ ya que r y l forman con t una pareja de ángulos A.I. congruentes (en este caso ángulos rectos). ■

Teorema 38 (Caso lado-ángulo-ángulo: L-A-A).

Sean los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tales que:

$$\widehat{BAC} \cong \widehat{EDF}, \quad \widehat{CBA} \cong \widehat{FED}.$$

Si $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ó $\overline{CB} \cong \overline{FE}$, entonces:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Demostración. (Ver Figura 20.). Bastará con demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ya que de aquí se concluye que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (L-A-L).

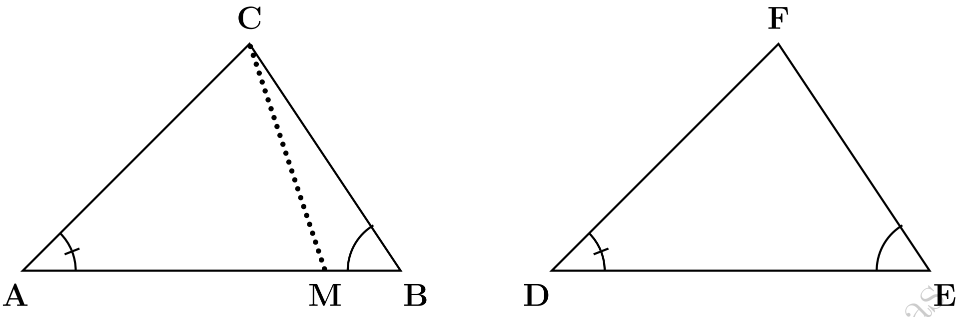


Figura 20.

Razonemos por reducción al absurdo.
Supongamos que $\overline{AB}$ no es congruente a $\overline{DE}$ ($\overline{AB} \ncong \overline{DE}$). Entonces:
i) $\overline{AB} > \overline{DE}$ ó
ii) $\overline{DE} > \overline{AB}$

Veamos que en cualquiera de los casos se llega a una contradicción.
i) Si $\overline{AB} > \overline{DE}$, entonces existe un M entre A y B de modo que $\overline{AM} \cong \overline{DE}$. Por tanto, $\triangle AMC \cong \triangle DEF$ (por Ax. L-A-L), de donde $\widehat{CMA} \cong \widehat{E}$. Pero por hipótesis $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, luego $\widehat{CMA} \cong \widehat{B}$ y se tiene en el triángulo $\triangle CMB$ que el ángulo exterior $\widehat{CMA}$ es congruente con el ángulo $\widehat{B}$, donde $\widehat{B}$ es ángulo interior en contradicción con el Teorema del ángulo exterior.
ii) Un razonamiento similar para el caso en que $\overline{DE} > \overline{AB}$ conduce de nuevo a una contradicción. ■

Teorema 39 (Cuatro casos de congruencia de triángulos rectángulos).

i) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes sus catetos, son congruentes.

ii) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes un cateto y un ángulo agudo, son congruentes (el cateto puede ser adyacente o no al ángulo agudo).

iii) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes la hipotenusa y un ángulo agudo, son congruentes.

iv) Dos triángulos rectángulos que tengan congruentes la hipotenusa y un cateto, son congruentes.

Demostración.
i) (Ver Figura 21.). Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ tal que $\overline{AC} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DF}$. Como $\widehat{A} \cong \widehat{D}$ (por ser rectos),
$\triangle BAC \cong \triangle FDE$ (L-A-L).

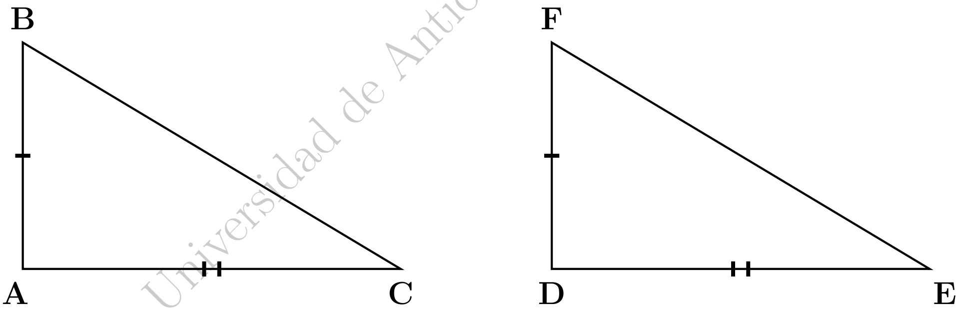


Figura 21.

ii)(Figuras 22. y 23.). En efecto, en un caso se tiene congruencia por A-L-A y en el otro caso, se tiene congruencia por L-A-A.

Para el caso iii) se tiene la Figura 24..

iv)(Figura 25.). En efecto, sean los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EDF$ tales que: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

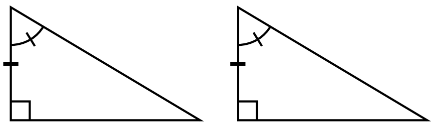


Figura 22.

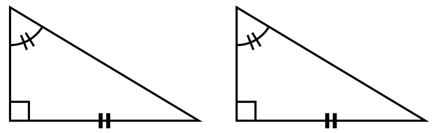


Figura 23.

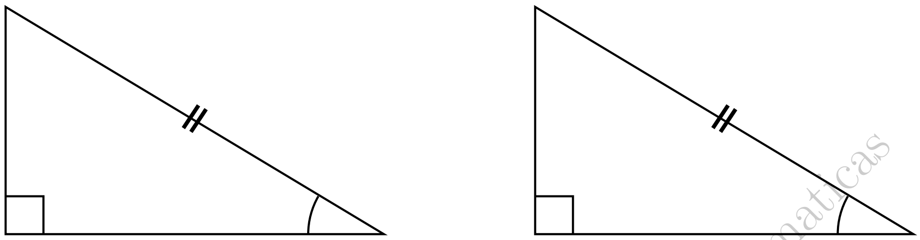


Figura 24.

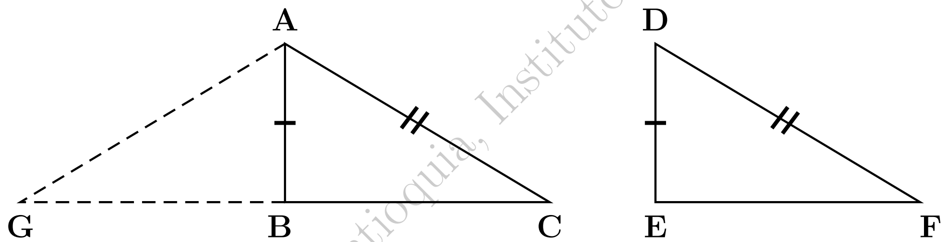


Figura 25.

Tomemos $G \in \overleftrightarrow{BC}$ de modo que B esté entre G y C y además $\overline{BG} \cong \overline{EF}$. Entonces $\triangle ABG \cong \triangle DEF$ (catetos congruentes) (1).
De donde $\overline{DF} \cong \overline{AG}$ pero $\overline{DF} \cong \overline{AC}$ (hipótesis). Luego, $\overline{AC} \cong \overline{AG}$, de aquí se sigue que $\widehat{G} \cong \widehat{C}$ y por lo tanto : $\triangle ABC \cong \triangle ABG$ (L-A-A ó caso iii)) (2).

De (1) y (2) se concluye que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$. ■

Corolario 12. :

1. *Dado un ángulo* $\widehat{AOB}$, *cualquier punto de su bisectríz equidista de los lados del ángulo, e inversamente, cualquier punto en el interior del ángulo que equidista de los lados pertenece a la bisectríz del ángulo.*

2. *Dado un segmento $\overline{AB}$, cualquier punto de la mediatríz del segmento equidista de los extremos del segmento y recíprocamente, cualquier punto en el plano del segmento y la mediatríz que equidiste de los extremos del segmento pertenece a la mediatríz del segmento.*

Nota:

1. Decimos, en el caso 1., que la bisectríz de un ángulo es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

2. Decimos en el caso 2., que la mediatríz es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Demostración. (Ver Figura 26.). Basta aplicar los casos (iii) y (iv) de congruencia de triángulos rectángulos. ■

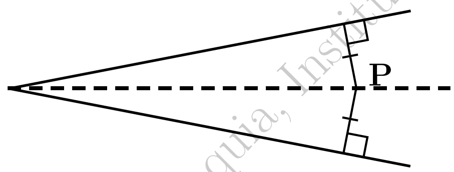


Figura 26.

4.3. AXIOMA DE PARALELISMO

V POSTULADO DE EUCLIDES (V.P.E.)

Si dos rectas distintas l y r, coplanares cortadas por una secante t en puntos distintos, forman con ella en el semiplano Π_t dos ángulos interiores, de tal manera que la suma de sus medidas sea menor que 180^0, entonces las dos rectas se cortan en algún punto del semiplano Π_t, (Figura 27.).

O sea : si $\alpha + \beta < 180^0$ entonces l y r se cortan en Π_t.
El quinto postulado de Euclides (V.P.E.) tiene un enunciado equivalente, llamado el postulado de la paralela única de Playfair, el cual dice así:

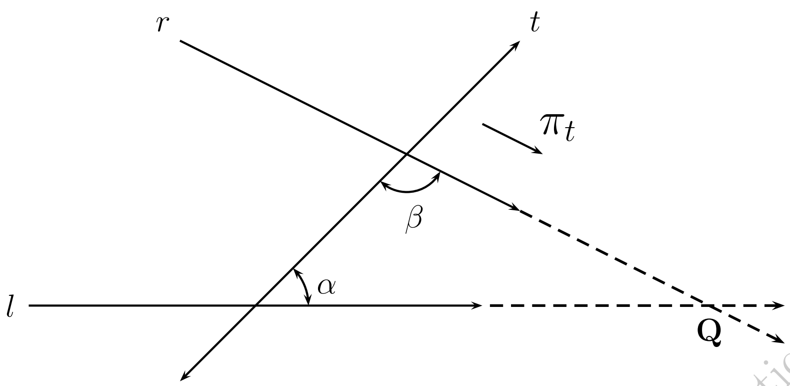


Figura 27.

"por un punto exterior a una recta pasa una paralela a la recta y sólo una".

NOTA HISTÓRICA.

El quinto postulado causó un trastorno considerable desde la época de los griegos. Muchos geómetras pensaron que tal vez podría deducirse como teorema a partir de los restantes axiomas o postulados. Euclides mismo trato de evitarlo mientras pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición 120. Durante más de 2.000 años fueron ofrecidas diferentes "demostraciones"del postulado, pero cada una se basaba en una suposición equivalente al mismo.

Los esfuerzos realizados, sin embargo, condujeron a que en la primera mitad del siglo XIX, se inventara una geometría que difería radicalmente de la de Euclides. Antes de este hecho se pensaba que existía solo una geometría posible. La independencia del postulado de las paralelas, quedó establecida cuando fue demostrada la compatibilidad de las otras geometrías donde el V Postulado se negaba o cambiaba por otro. Cualquier geometría cuyos axiomas contradicen alguno de los de Euclides, es llamada no Euclidiana. La primera de ellas que se inventó es la llamada Geometría lobachevsquiana. Gauss (1777-1855) en Alemania, Bolyai (1802-1860) en Hungría y Lobachevsky (1793-1856) en Rusia, plantearon independientemente la forma de Playfair (1748-1819) del postulado, considerando tres posibilidades: Por un punto exterior a una recta, pueden trazarse más de una, únicamente una, o ninguna paralela a la recta. Suponiendo la infinidad de la recta, el tercer caso fue eliminado. Estableciendo una geometría compatible con la primera hipótesis, los tres matemáticos realizaron extensos desarrollos geométricos y trigonométricos. Debido a la prioridad de Lobachevsky en la publicación, la geometría así construída recibió su nombre. En 1854 Riemann (1826 - 1866), demostró que si se descarta la infinitud de la recta, entonces, con algunas ligeras modificaciones de los postulados restantes, se podría desarrollar una geometría compatible con la tercera hipótesis. Al trabajo de Riemann se debe una generalización considerable del concepto de espacio, que ha encontrado aplicaciones en la teoría física de la relatividad.

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas no solo liberó a la geometría de su molde tradicional, sino que modificó considerablemente los conceptos de la matemática en general y condujo a un estudio profundo de los fundamentos de esta materia y a un desarrollo más amplio del método axiomático.

El desarrollo de la geometría euclidiana, con el quinto postulado suprimido, recibe el nombre de geometría absoluta, contiene las proposiciones que son comunes a las geometrías de Euclides y de Lobachevsky.

Vamos, en la proposición que sigue, a demostrar la equivalencia del V.P.E. con el postulado de la paralela única de Playfair.

Teorema 40.

El V.P.E. es equivalente al postulado de la paralela única de Playfair.

Demostración. 1. Asumamos que se cumple el postulado de la paralela única de Playfair, es decir, que para toda recta l y todo $P \notin l$, existe una única recta r tal que: $P \in r$ y $r \parallel l$.
Sean l y m dos rectas dadas y t una secante tal que:

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 180^0$$

Vamos a probar, para tener el V.P.E., que l y m se cortan en el semiplano π_t, (ver Figura 28.).

Es claro que $\alpha_1 + \alpha_3 = 180^0$, de donde, $\alpha_1 = 180^0 - \alpha_3$.

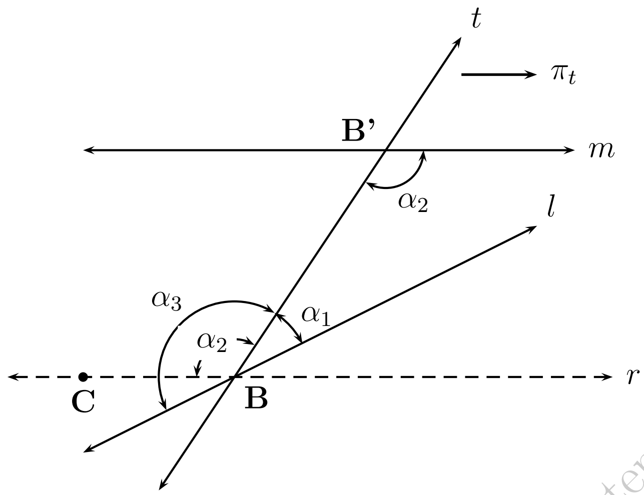


Figura 28.

Como $\alpha_1 + \alpha_2 < 180^0$, entonces $180^0 - \alpha_3 + \alpha_2 < 180^0$, de donde $\alpha_2 < \alpha_3$. Luego por el axioma de construcción del ángulo, existe una única semirrecta $\overrightarrow{BC}$ tal que: $\widehat{B'BC} \cong \measuredangle(\overrightarrow{B'B}, m) \cong \widehat{\alpha_2}$. Por tanto, $m \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

Ahora B está en l; $B \in r$ y $r \parallel m$. Pero por el postulado de Playfair, por B solo pasa una paralela a m. Por tanto, toda recta distinta de r que pase por B corta a m. Como l pasa por B y es distinta a r corta a m. Veamos ahora que se cortan en Π_t. Supongamos que se cortan en Π_l, (ver Figura 29.).

En el triángulo $\triangle ABB'$, α_2 es ángulo exterior del triángulo $\triangle ABB'$. Luego, por $T.\measuredangle.E.$, $\alpha_2 > \alpha_3$. Contradicción, ya que teníamos que $\alpha_2 < \alpha_3$. Por lo tanto l y m se cortan en el semiplano Π_t.

2. Supongamos ahora que es válido el V.P.E. Sea l una recta dada y $P \notin l$, (ver Figura 30.).

Sea t la perpendicular por P a l y r la perpendicular por P a la recta t. Por el teorema de ángulos alternos internos, ya tenemos que $r \parallel l$.
Bastará con demostrar que toda otra recta que pase por P corta a l.
Sea pues n otra recta que pasa por P y paralela a l, n distinta a r.
Llamemos α_1, al ángulo agudo que hace n con t.

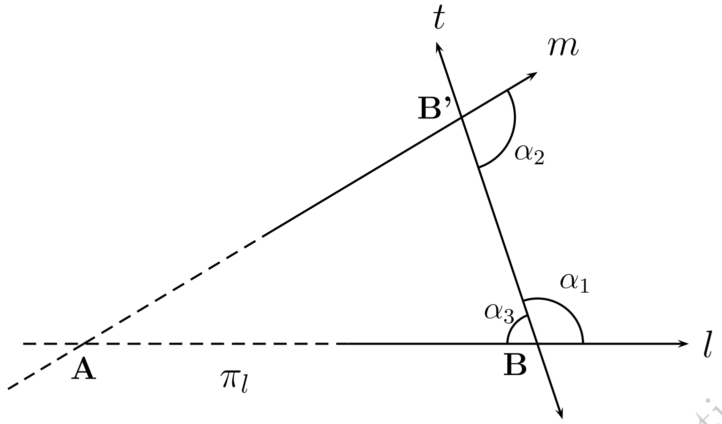


Figura 29.

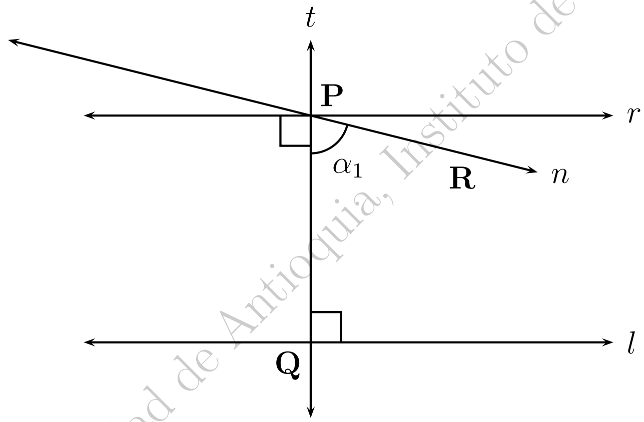


Figura 30.

Como $\alpha_1 < 90^0$ entonces $\alpha_1 + 90^0 < 90^0 + 90^0 = 180^0$ y por el V.P.E. n y l se cortan del lado en que se forma el ángulo agudo. (Absurdo, porque l y n son paralelas).

Vamos a estudiar ahora algunas consecuencias del V.P.E. o de su equivalente, el postulado de la paralela única de Playfair. ■

Teorema 41.

Si dos rectas distintas y coplanares son paralelas, toda secante que corta a una de ellas corta a la otra.

Demostración. Supongamos $l \parallel r$ y que s corta a la recta l en un punto A. Por tanto la recta s es distinta a la recta l. Veamos que s corta a r.

En efecto, si s no cortara a r se tendría $s \parallel r$, con s pasando por A. En conclusión tendríamos dos rectas pasando por $A\,(s$ y $l)$ ambas paralelas a r. Luego, por el postulado de Playfair se tendrá que $s \equiv l$. Contradicción, ya que s es distinta a l. ■

Teorema 42.

El paralelismo de rectas es una relación de equivalencia, o sea que es: reflexiva, simétrica y transitiva.

Demostración. 1. Reflexiva: es claro que $l \parallel l$.
2. Simétrica: también es claro que si $l \parallel r$, entonces $r \parallel l$.
3.Transitiva: supongamos que $l \parallel r$ y $r \parallel s$ con l, r y s todas distintas. Veamos que $l \parallel s$.
Razonemos por reducción al absurdo.
Si $l \nparallel s$, l y s se cortaran en A, (Figura 31.) y por A se tendrían dos paralelas distintas l y s a r, lo que contradice el axioma de la paralela única. Por tanto, $l \parallel s$. ■

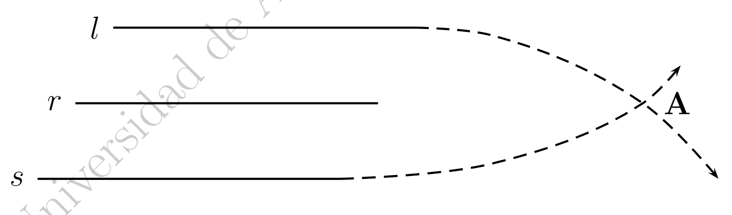


Figura 31.

Teorema 43.

Si dos rectas distintas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas lo es a la otra.

Demostración. Supongamos $l \parallel r$, $l \not\equiv r$ y sea $n \perp l$ en A $(A \in l)$. Es claro que n corta a l en A.

Luego por el **Teorema 41**, n corta a r. Llamemos B el punto donde n corta a r, (Figura 32.).
Veamos que $\widehat{CBA}$ es recto. Razonemos por reducción al absurdo, esto es, supongamos que $\widehat{CBA}$ no es recto.

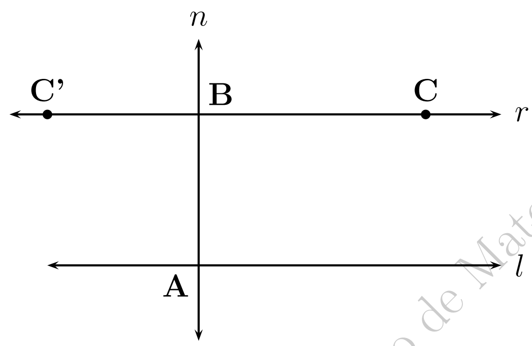


Figura 32.

1. Si $\widehat{CBA}$ es agudo, entonces r y l harían con la secante n una pareja de ángulos internos de un mismo lado cuya suma sería menor que 180^0 y por el V.P.E. r y l se cortarían, contradicción ya que por hipótesis $l \parallel r$.

2. Si $\widehat{CBA}$ es obtuso, entonces $\widehat{C'BA}$ es agudo y las dos rectas se cortarían del lado de C', llegándose de nuevo a una contradicción. Por lo tanto, $\widehat{CBA}$ es recto. ■

Corolario 13. *Las rectas perpendiculares a dos rectas que se cortan también se cortan.*

Demostración. Sean x, y, dos rectas que se cortan en O. Tomemos $A \in \overrightarrow{OX}$ y $B \in \overrightarrow{OY}$.

Sean $n \perp \overrightarrow{OX}$ por A y $m \perp \overrightarrow{OY}$ por B, (Figura 33.). Demostremos que m y n se cortan. Razonemos por reducción al absurdo.

Si m y n no se cortaran, serían paralelas, es decir, $m \parallel n$. Pero $\overrightarrow{OX} \perp n$, entonces $\overrightarrow{OX} \perp m$ (por teorema anterior) (1).

Ahora, por hipótesis $\overleftrightarrow{OY} \perp m$ (2)

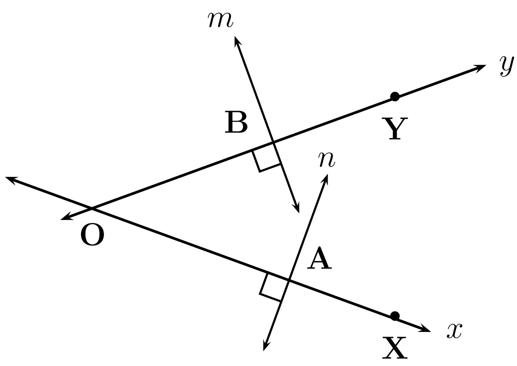


Figura 33.

En (1) y (2) se tienen dos rectas perpendiculares a una tercera, luego se concluye que $\overleftrightarrow{OX} \| \overleftrightarrow{OY}$, lo que es una contradicción. ■

Recuérdese que habíamos demostrado en el **Teorema 33** que "si dos rectas hacen con una secante una pareja de ángulos A.I. congruentes, las rectas son paralelas". El recíproco de este enunciado lo daremos en la siguiente proposición.

Teorema 44 (Alternos internos entre paralelas).

Dadas dos rectas distintas y paralelas, los ángulos alternos internos que forman con cualquier secante son congruentes.

Demostración. Sean $l \parallel r$ y t una secante cualquiera que corta a l en B y a r en A, (Figura 34.).

Sea O punto medio de $\overline{AB}$.

Bajemos desde O, $\overleftrightarrow{OH} \perp l$. Como $\overleftrightarrow{OH} \perp l$ y $l \parallel r$, entonces $\overleftrightarrow{OH} \perp r$.

Así que si llamamos Q al punto de encuentro de $\overleftrightarrow{OH}$ con r se tendrá que $\widehat{OQA}$ es recto.

Ahora: $\triangle OBH \cong \triangle OQA$ (hipotenusa- ángulo agudo). Luego $\widehat{OAQ} \cong \widehat{OBH}$ lo que demuestra el teorema. ■

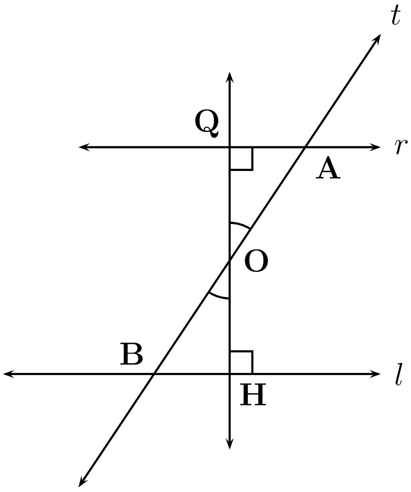


Figura 34.

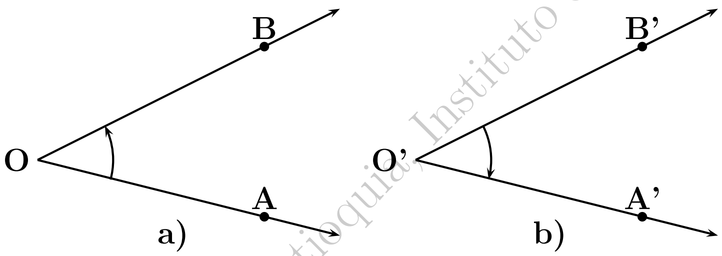


Figura35 .

Corolario 14. *Dadas dos rectas distintas y paralelas, los ángulos correspondientes que se forman con cualquier secante son congruentes.*

Definición 31. *Dado el $\widehat{AOB}$, si tomamos el lado $\overrightarrow{OA}$ como lado inicial y el lado $\overrightarrow{OB}$ como lado final, entonces decimos que $\widehat{AOB}$ es un ángulo orientado, si la orientación es en el sentido de las agujas del reloj, decimos que la orientación es horaria, si la orientación es en sentido contrario a las agujas del reloj, decimos que la orientación es antihoraria.*

En la Figura 35 a), $\widehat{AOB}$ tiene sentido horario y en b), $\widehat{A'O'B'}$ tiene sentido a antihorario.
Incluimos ahora dos proposiciones cuya demostración la dejamos al lector.

Proposición 1.
i) Dos ángulos que tengan sus lados respectivamente paralelos, si tienen el mismo sentido son congruentes y si tienen sentidos contrarios, son suplementarios.
ii) Dos ángulos que tengan sus lados respectivamente perpendiculares, si tienen el mismo sentido son congruentes y si tienen sentidos contrarios, son suplementarios.

Proposición 2.
Si dos rectas paralelas son cortadas por otras dos paralelas, los segmentos opuestos que se determinan son congruentes, (Figura 36.).

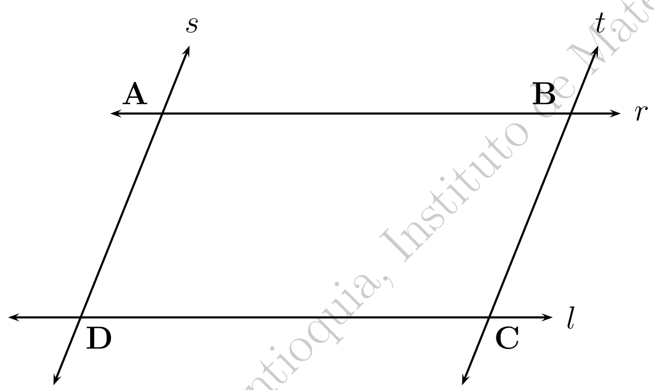


Figura 36.

Según la figura si $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AD} \| \overleftrightarrow{BC}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.

Corolario 15. *Si $l \parallel r$, entonces para todo punto P perteneciente a l, la distancia del punto P a r es constante.*

A la constante dada se le llama la distancia entre las paralelas l y r.

Definición 32 (**Lugar Geométrico).** *Se llama lugar geométrico a la figura cuyos puntos cumplen una o varias condiciones geométricas.*

Ejercicio: determinar el Lugar Geométrico de los puntos que están a una distancia r de una recta fija l.

Teorema 45 (Suma de los ángulos interiores de un triángulo).
La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es 180^0.

Demostración. (Ver Figura 37.). Sea $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ trazada por C.
Como $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ secante, entonces: $\beta = \beta_2$.
Como $l \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ secante, entonces: $\alpha = \beta_1$
Además es claro $\beta_1 + \gamma + \beta_2 = 180^0$. Luego: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. ■

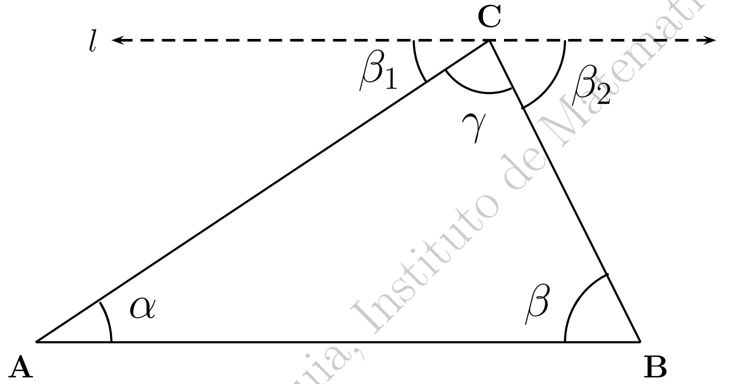


Figura 37.

Corolario 16. *La medida de todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes.*

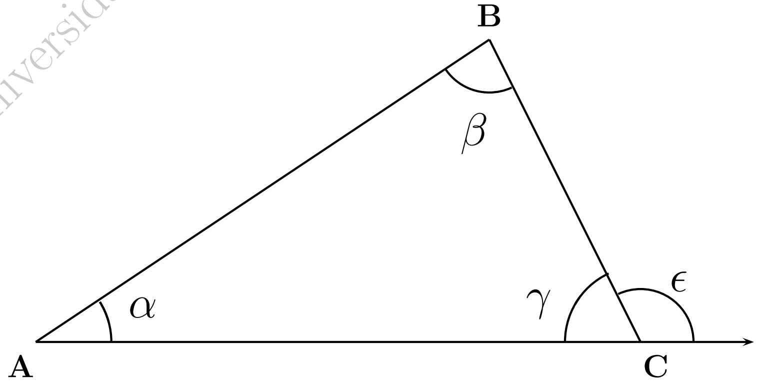


Figura 38.

Demostración. (Ver Figura 38.).
(1) $\epsilon + \gamma = 180^0$
(2) $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$

De (1) y (2) se tiene que: $\epsilon = \alpha + \beta$. ∎

Corolario 17. *En todo triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los ángulos agudos es* 90^0.

Corolario 18. *Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos respectivamente congruentes, entonces los otros dos ángulos son respectivamente congruentes.*

Teorema 46 (Paralela media de un triángulo).

i) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene por medida la mitad de la medida del tercer lado.

ii) Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela a un lado, dicha paralela biseca al otro lado.

Demostración. (Ver Figura 39.) i) Sean M y N puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, respectivamente.
Demostremos que: $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y que $MN = \frac{1}{2}\,AB$.
Prolonguemos $\overline{MN}$ tal que: $\overline{MN} \cong \overline{NT}$.
Los triángulos $\triangle MNC$ y $\triangle TNB$ son congruentes por L-A-L.

Luego los ángulos: $\alpha = \alpha_1$ (1)
$\overline{MC} \cong \overline{BT}$ (2)
luego de (1), las rectas $\overleftrightarrow{TB}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ son paralelas por hacer ángulos alternos congruentes con la secante $\overleftrightarrow{MT}$.

Como $\overline{MC} \cong \overline{MA}$, entonces $\overline{MA} \cong \overline{BT}$ y $\widehat{MAT} \cong \widehat{ATB}$ (ángulos alternos internos entre paralelas) y además, $\overline{AT} \cong \overline{AT}$.

Luego, $\triangle MAT \cong \triangle ATB$ (L-A-L).
Luego, $\widehat{MTA} \cong \widehat{TAB}$ (por definición de congruencia de triángulos); luego, $\overleftrightarrow{MT} \parallel \overline{AB}$ (Teorema 33: Teorema de los alternos internos) y $\overline{MT} \cong \overline{AB}$.

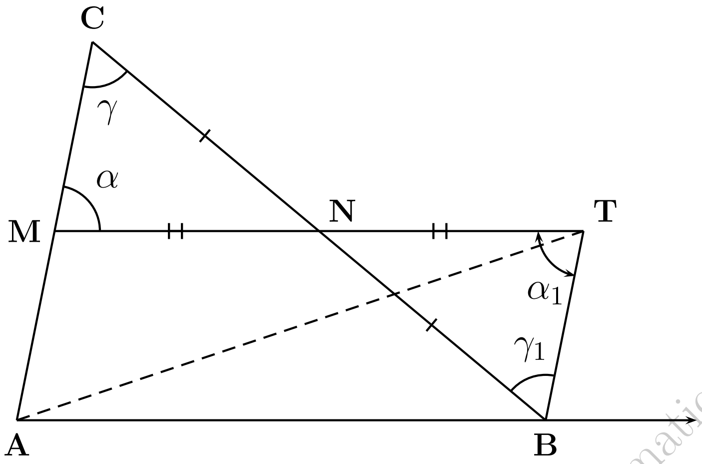


Figura 39.

N es el punto medio de $\overline{MT}$, entonces:
$\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y $MN = \frac{1}{2}AB$.

ii) (Figura 40.). Sea el triángulo $\triangle ABC$, M punto medio de $\overline{AC}$. $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, por N tracemos una paralela a $\overline{AC}$.

Tenemos: $\triangle MNC \cong \triangle TBN$, ya que
$\widehat{CMN} \cong \widehat{NTB}$, $\widehat{ACB} \cong \widehat{BNT}$ (por correspondientes) y

$$AM = NT = MC.$$

Entonces $CN = NB$. ■

Corolario 19. *En todo triángulo rectángulo la mediana relativa a la hipotenusa es la mitad de la hipotenusa.*

Demostración. (Ver Figura 41.). Sea $\overline{AM}$ mediana del triángulo rectángulo $\triangle BAC$.

Sea D el punto medio de $\overline{AB}$, entonces por teorema anterior $\overline{MD} \parallel \overline{CA}$ y por lo tanto $\widehat{MDB}$ es recto. Luego el triángulo $\triangle AMB$ es isósceles. De aquí concluimos que: $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ y como M es punto medio de $\overline{BC}$ se tiene que:

$$\overline{AM} \cong \overline{BM} \cong \overline{MC}$$ ■

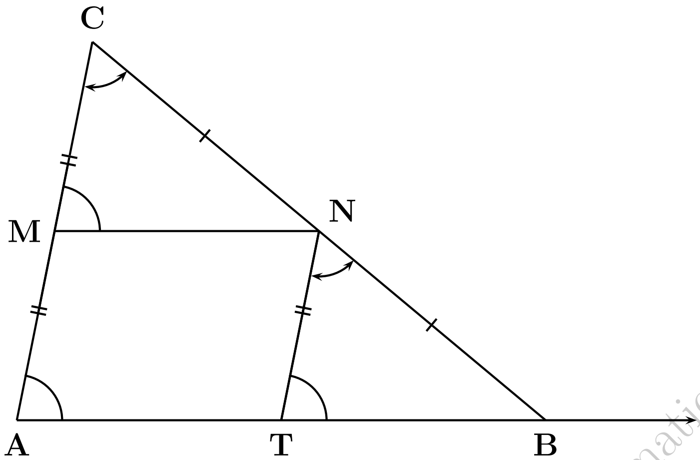


Figura 40.

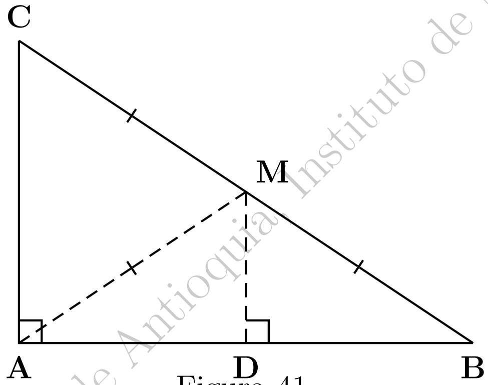


Figura 41.

Teorema 47.

Si el pie de una mediana de un triángulo equidista de los vértices del triángulo entonces el triángulo es rectángulo.

Demostración. (Ver Figura 42.). Sea $\overline{AM}$ la mediana relativa a $\overline{BC}$ y además $\overline{BM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AM}$. Demostremos que el ángulo $\widehat{A}$ es recto.
Como $\overline{BM} \cong \overline{AM}$, $\triangle AMB$ es isósceles y por lo tanto: $\beta = \alpha_1$.

Como $\overline{MC} \cong \overline{AM}$, $\triangle AMC$ es isóceles y por lo tanto : $\alpha_2 = \gamma$.
Luego: $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta + \gamma = 180^0 - m(\widehat{A})$. Pero $m(\widehat{A}) = \alpha_1 + \alpha_2$.
Por tanto: $m(\widehat{A}) = 180^0 - m(\widehat{A})$, de donde $2m(\widehat{A}) = 180^0$ y
$m(\widehat{A}) = 90^0$. ■

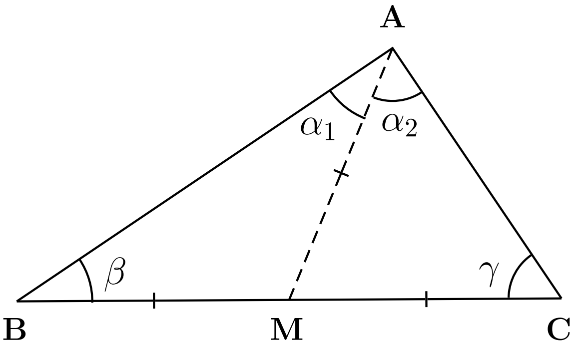


Figura 42.

Teorema 48 (**Teorema del circuncentro**).

Las mediatrices de un triángulo son concurrentes en un punto. (A este punto se le llama el circuncentro).

Demostración. (Se deja como ejercicio). ■

Teorema 49 (**Teorema del incentro**).

Las bisectrices de un triángulo son concurrentes en un punto. (A este punto se le llama el incentro).

Demostración. (Se deja como ejercicio). ■

Teorema 50 (**Teorema del ortocentro**).

Las rectas que contienen las alturas en un triángulo son concurrentes en un punto. (A este punto se le llama el ortocentro).

Demostración. (Ver Figura 43.) Por hipótesis se tiene que $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ son alturas. Veamos que $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ son concurrentes en un punto O.
Por Playfair, por A pasa $m \parallel \overline{BC}$, por C pasa $n \parallel \overline{AB}$ y por B pasa $l \parallel \overline{AC}$. Sean $\{A'\} = m \cap l$; $\{B'\} = m \cap n$; $\{C'\} = l \cap n$; y como segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas son congruentes y $m \parallel \overleftrightarrow{BC}$ y $n \parallel \overleftrightarrow{AB}$, entonces por la (**Proposición 2**) $\overline{AB'} \cong \overline{BC}$.
Similarmente, como $\overleftrightarrow{BC} \parallel m$ y $l \parallel \overleftrightarrow{AC}$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{A'A}$, y por tanto A es punto medio de $\overline{A'B'}$.
Como $\overline{BC} \parallel m$ y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ por hipótesis, entonces $\overline{AD} \perp m$ y por tanto

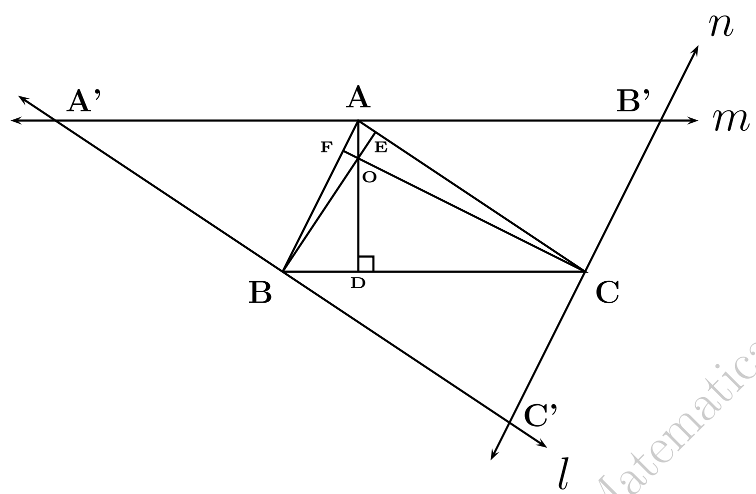


Figura 43.

$\overleftrightarrow{AD}$ es mediatríz de $\overline{A'B'}$.
Similarmente se demuestra que $\overleftrightarrow{BE}$ es mediatríz de $\overline{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ es mediatríz de $\overline{C'B'}$.
Por lo tanto en el $\triangle A'B'C'$ se tiene que $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CF}$ son mediatrices de los lados del $\triangle A'B'C'$ y por el teorema del circuncentro, estas rectas son concurrentes en un punto O.
Obsérvese que O es el circuncentro del $\triangle A'B'C'$ y O es el ortocentro del $\triangle ABC$. ■

4.4. DESIGUALDADES EN EL TRIÁNGULO

Teorema 51.

En un **mismo** *triángulo, si dos lados no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes y al lado mayor se opone ángulo mayor.*

Hipótesis: $\overline{AB} \ncong \overline{BC},\ m(\overline{AB}) < m(\overline{BC})$

Tesis: $\widehat{A} \ncong \widehat{C}$, $\quad \widehat{C} < \widehat{A}$

Demostración. (Ver Figura 44.). Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\widehat{A} \cong \widehat{C}$, entonces el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles y por tanto $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. Absurdo!. Luego $\widehat{A} \ncong \widehat{C}$.

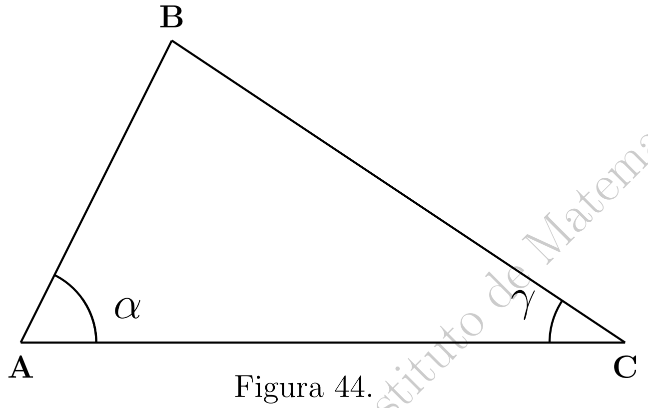


Figura 44.

Como $m(\overline{AB}) < m(\overline{BC})$, existe D entre B y C tal que $\overline{BD} \cong \overline{AB}$, (Figura 45.).
Por tanto $\triangle ABD$ es isósceles y $\widehat{BAD} \cong \widehat{BDA}$ y $\theta = \delta$ y como D es distinto de C y $D \notin \overleftrightarrow{AC}$, entonces D, A y C son tres puntos distintos no colineales y por tanto el $\triangle ADC$ existe y como el ángulo $\widehat{BDA}$ es exterior al triángulo $\triangle ADC$, $\delta > \gamma$, luego $\theta > \gamma$.
Ahora, como D está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AD}$ está en el interior del ángulo $\widehat{A}$ **(Teorema 7 y Corolario 1.)**. Luego, $\theta < \alpha$ y en consecuencia $\alpha > \gamma$. ■

Teorema 52.

En un **mismo** *triángulo, si dos ángulos no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos no son congruentes y al ángulo mayor se opone lado mayor. De otro modo: En cualquier triángulo $\triangle ABC$, si $\gamma > \beta$, entonces: $m(\overline{AB}) > m(\overline{AC})$.*

Demostración. (Ver Figura 46.). Razonemos por reducción al absurdo. Sea $\gamma > \beta$ y supongamos que $m(\overline{AB}) \leq m(\overline{AC})$. Si $m(\overline{AB}) = m(\overline{AC})$, entonces, el triángulo $\triangle ABC$ es isósceles y por tanto $\gamma = \beta$. Absurdo!.

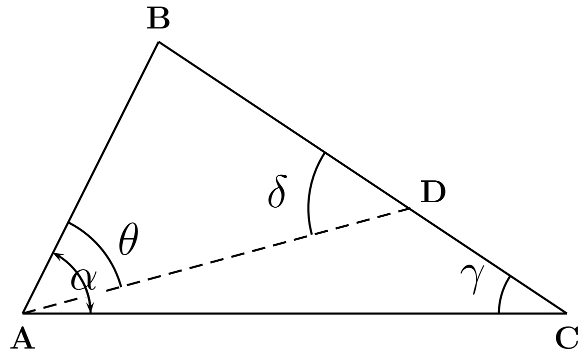


Figura 45.

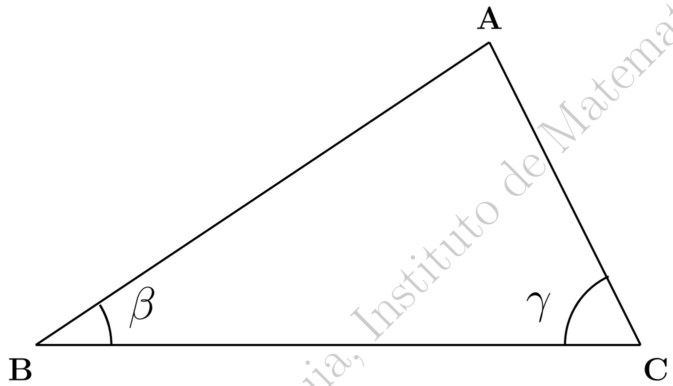


Figura 46.

Si $m(\overline{AB}) < m(\overline{AC})$, entonces, por el teorema anterior, $\gamma < \beta$ Absurdo!. Luego, $m(\overline{AB}) > m(\overline{AC})$. ■

Observación : Los **Teoremas 51 y 52** nos dicen que en un mismo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

Teorema 53 (Teorema de las oblicuas).

Si desde un punto exterior a una recta se trazan un segmento perpendicular y dos segmentos oblicuos, entonces:

i) El segmento perpendicular es el de menor longitud.

ii) De los segmentos oblicuos es mayor el que se aparta más del pie de la perpendicular.

iii) Si los dos segmentos oblicuos no tienen la misma longitud, el de mayor longitud se aparta más del pie de la perpendicular.

Demostración. i) Sea Q el pie de la perpendicular desde el punto P a la recta l, y sea R cualquier otro punto de l, (ver Figura 47.).
Veamos que: $m(\overline{PQ}) < m(\overline{PR})$.

En efecto, sea S un punto de l, tal que Q esté entre S y R.

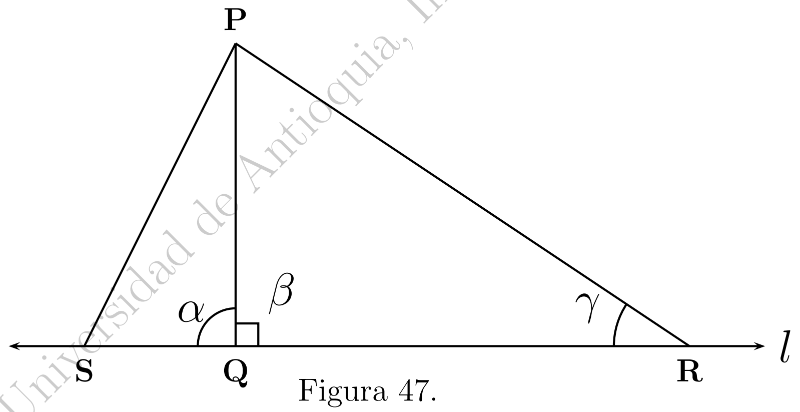


Figura 47.

Entonces $\widehat{PQS}$ es exterior a el triángulo $\triangle PQR$, luego $\alpha > \gamma$. Como $\alpha = \beta$, entonces $\beta > \gamma$ y por el **Teorema 52**, $m(\overline{PR}) > m(\overline{PQ})$.

Los numerales ii) y iii) se dejan al lector. ■

Observación: el teorema anterior nos permite afirmar que la distancia de un punto a una recta es el segmento de menor medida que se puede trazar entre el punto y la recta.

Teorema 54 (Desigualdad Triangular).

La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

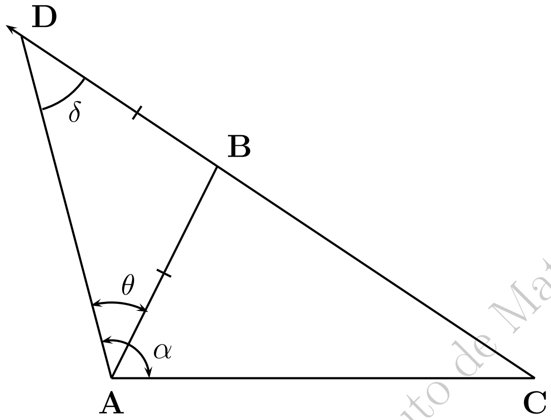


Figura 48.

Demostración. (Ver Figura 48.). Tomemos un punto D sobre la recta $\overleftrightarrow{BC}$, tal que B esté entre D y C y $\overline{DB} \cong \overline{AB}$.
Como $m(\overline{DC}) = m(\overline{DB}) + m(\overline{BC})$, entonces:

$$m(\overline{DC}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) \quad (1).$$

Además, $\theta < \alpha \quad (2)$, (ya que B está en el interior de $\widehat{DAC}$).

Como $\triangle DAB$ es isósceles, entonces $\theta = \delta \quad (3)$.

Por (2) y (3) $\delta < \alpha$ y en consecuencia, en $\triangle ADC$, $m(\overline{AC}) < m(\overline{DC})$ (4) y por **(Teorema 52)**.

De (1) y (4) se deduce que:

$$m(\overline{AC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{BC}) \qquad \blacksquare$$

Corolario 20. *La longitud de un lado cualquiera de un triángulo es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos lados.*

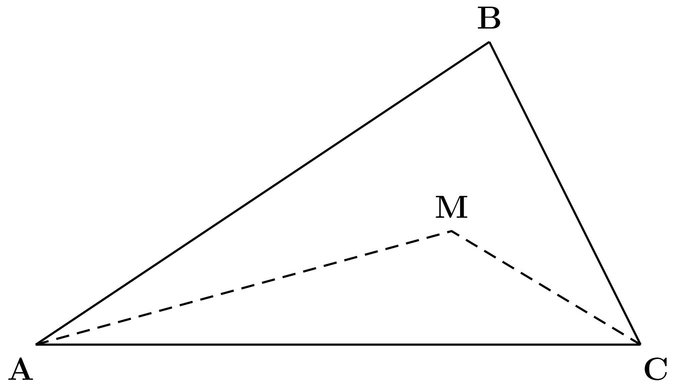


Figura 49.

Demostración. En efecto, como $m(\overline{AC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{BC})$, entonces,

$$m(\overline{BC}) > m(\overline{AC}) - m(\overline{AB}). \quad \blacksquare$$

El contra-recíproco del teorema de la desigualdad triangular nos da un criterio para puntos colineales.

Corolario 21. *Si dados tres puntos A, B y C, tales que $AB + BC = AC$ entonces los puntos A, B y C son colineales.*

Corolario 22. *Sea M un punto interior del triángulo $\triangle ABC$. Entonces, $m(\overline{AM}) + m(\overline{MC}) < m(\overline{AB}) + m(\overline{BC})$, (ver Figura 49.).*

Teorema 55 (Criterio L-A-L en desigualdades).

Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el lado opuesto del primer triángulo es mayor que el lado opuesto del segundo.

Hipótesis: (ver Figura 50.) $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \quad \overline{AC} \cong \overline{DF}, \quad \alpha > \delta$

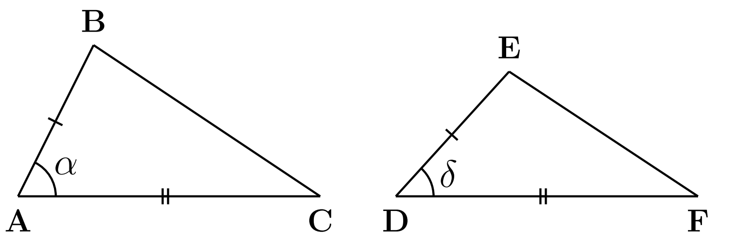


Figura 50.

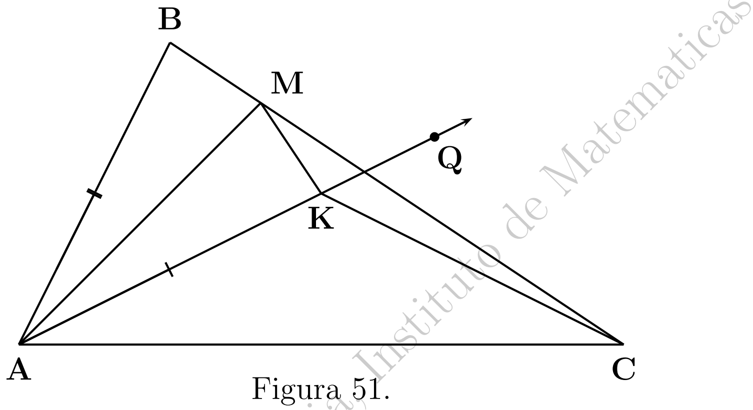


Figura 51.

Tesis: $m(\overline{BC}) > m(\overline{EF})$

Demostración. (Ver Figura 51.). Como $\alpha > \delta$, existe una semirrecta $\overrightarrow{AQ}$ interior a $\widehat{\alpha}$ tal que $\widehat{CAQ} \cong \widehat{EDF}$

Sobre $\overrightarrow{AQ}$ tomemos un punto K tal que $\overline{AK} \cong \overline{DE}$.
El triángulo $\triangle AKC \cong \triangle DEF$ (L-A-L), Por tanto:

$$\overline{CK} \cong \overline{EF} \quad (1).$$

Tracemos la bisectríz de $\widehat{BAK}$, sea M el punto donde la bisectríz corta al lado $\overline{BC}$. Ya que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{AK} \cong \overline{DE}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{AK}$. Luego $\triangle ABM \cong \triangle AKM$ (L-A-L) y en consecuencia, $\overline{BM} \cong \overline{MK}$ (2).
Con el punto K pueden suceder dos casos: a) el punto K es colineal con B y C, en este caso por el Teorema de la barra trasversal, $B - K - C$ y por tanto $\overline{BC} > \overline{CK}$ y como $\overline{CK} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{BC} > \overline{EF}$.
b) el punto K no es colineal con B y C y por tanto el $\triangle CKM$ existe. En

el $\triangle CKM$, $m(\overline{CK}) < m(\overline{MK}) + m(\overline{MC})$. **(Teorema 54: desigualdad triangular)**.
De (1) y (2), $m(\overline{EF}) < m(\overline{BM}) + m(\overline{MC})$.
Pero, $m(\overline{BM}) + m(\overline{MC}) = m(\overline{BC})$ ya que $B - M - C$, entonces

$$m(\overline{EF}) < m(\overline{BC}).$$ ■

Teorema 56 (Criterio L-L-L para desigualdades).

Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo, entonces el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo.

Hipótesis: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $m(\overline{BC}) > m(\overline{EF})$

Tesis: $\alpha > \delta$

Demostración. (Ver Figura 52.). Razonemos por reducción al absurdo.
Supongamos que $\alpha \leq \delta$.
Si $\alpha = \delta$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (L-A-L) y en consecuencia $\overline{BC} \cong \overline{EF}$. Absurdo!.
Si $\alpha < \delta$, entonces $m(\overline{BC}) < m(\overline{EF})$. Absurdo!.
Luego, $\alpha > \delta$ ■

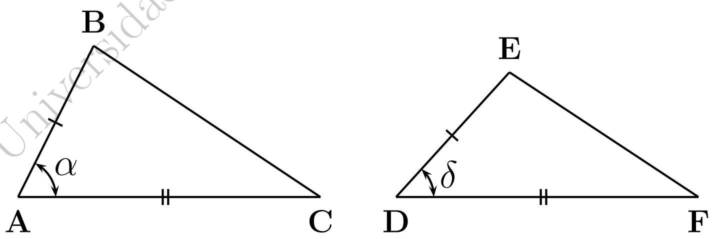


Figura 52.

4.5. Ejercicios y Problemas de Paralelismo y Continuidad

1. Dado el $\triangle ABC$ y la mediana $\overline{AD}$ relativa al lado $\overline{BC}$; sea E el punto medio de $\overline{AD}$, se traza la semirecta $\overrightarrow{BE}$, la cual corta al lado $\overline{AC}$ en F. Demostrar que $AF = \frac{1}{3}AC$.

2. Demostrar que los segmentos que unen los puntos medios de un triángulo, determinan cuatro triángulos congruentes.

3. Demostrar que en cualquier triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa es congruente con el segmento que une los puntos medios de los catetos.

4. Demostrar que en un triángulo isósceles:
   a) Las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes.
   b) Las alturas relativas a los lados congruentes son congruentes.
   c) Las medianas relativas a los lados congruentes son congruentes.

5. a) Demostrar que si un triángulo tiene dos alturas congruentes entonces el triángulo es isósceles.
   b) Demostrar que si un triángulo tiene dos medianas congruentes entonces el triángulo es isósceles.

6. Sean los puntos A, B, C, D colineales tal que B esta entre A y C, C esta entre B y D, los puntos M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Probar que
$$m\overline{MN} = \frac{1}{2}(m\overline{AC} + m\overline{BD})$$

7. Por un punto O de una recta $\overleftrightarrow{XY}$, tal que O esta entre X e Y, se trazan las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en un mismo semiplano respecto a $\overleftrightarrow{XY}$. La bisectriz de $\measuredangle AOB$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{XY}$ y las bisectrices de $\measuredangle XOA$ y $\measuredangle BOY$ forman un ángulo de 100^0. Cuanto miden $\measuredangle XOA$, $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOY$
   (**Rta.:** $\measuredangle XOA = 80^o$, $\measuredangle AOB = 20^o$ y $\measuredangle BOY = 80^o$)

8. Demostrar que la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto, equidista de los extremos de dicho lado.

9. Desde un punto D en la bisectriz de un ángulo $\measuredangle A$ se trazan segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$ perpendiculares a los lados de $\measuredangle A$ con B y C a cada lado, demostrar que $\overleftrightarrow{AD}$ es la mediatriz de ΔABC

10. Demostrar que el ángulo formado por la bisectriz de un ángulo y una semirrecta cualquiera exterior al ángulo y con origen en el mismo vértice, tiene por medida la semisuma de las medidas de los ángulos que forma la semirrecta con cada uno de los lados del ángulo original.

11. Demostrar que en triángulos congruentes, las medianas homólogas son congruentes.

12. Sean los puntos O, A, B, C colineales con A entre O y C, C entre A y B. Si $m\overline{AC} = \frac{1}{2}m\overline{CB}$, probar que:

$$m\overline{OC} = \frac{2m\overline{OA} + m\overline{OB}}{3}$$

13. Sean los puntos O, A, B colineales con X punto medio de $\overline{AB}$. Demuestre que:

    a) $m\overline{OX} = \frac{1}{2}(m\overline{OA} + m\overline{OB})$ si $O \notin \overline{AB}$
    b) $m\overline{OX} = \frac{1}{2}(m\overline{OB} - m\overline{OA})$ si $O \in int\overline{AB}$, con O entre A y X
    c) $m\overline{OX} = \frac{1}{2}(m\overline{OA} - m\overline{OB})$ si $O \in int\overline{AB}$, con O entre B y X

14. Sean los puntos $B, C \in int\overline{AD}$ con O punto medio de $\overline{AD}$ y de $\overline{BC}$. Demostrar que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

15. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ que forman con la semirrecta $\overrightarrow{OX}$ ángulos $\measuredangle XOA$ y $\measuredangle XOB$. Si $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz de $\measuredangle AOB$, con $\overrightarrow{OX} \subset int\measuredangle AOB$, probar que:

    $m\measuredangle XOC = \frac{1}{2}(m\measuredangle XOA - m\measuredangle XOB)$, si $\overrightarrow{OC} \subset int\measuredangle XOA$

    $m\measuredangle XOC = \frac{1}{2}(m\measuredangle XOB - m\measuredangle XOA)$, si $\overrightarrow{OC} \subset int\measuredangle XOB$

    Si $\overrightarrow{OX} \subset Ext\measuredangle AOB$, probar que $m\measuredangle XOC = \frac{1}{2}(m\measuredangle XOA + m\measuredangle XOB)$

16. Sean las semirrectas $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \subset int\measuredangle AOD$, tales que $\measuredangle AOC \cong \measuredangle BOD$. Si $\overrightarrow{OX}$ es la bisectriz de $\measuredangle AOD$, demostrar que $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD$ y también que $\overrightarrow{OX}$ es bisectriz de $\measuredangle BOC$.

17. Cuatro semirrectas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$ forman ángulos consecutivos alrededor del punto O, tales que: $m\measuredangle DOA = m\measuredangle COB = 2m\measuredangle AOB$ y $m\measuredangle COD = 3m\measuredangle AOB$.

    Hallar $m\measuredangle AOB$, $m\measuredangle DOA$, $m\measuredangle COD$.

18. Demostrar que las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice son semirrectas opuestas.

19. Las bisectrices de dos ángulos consecutivos $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ se cortan perpendicularmente. Demuestre que A, O, C son colineales.

20. Se unen los lados de un ángulo $\measuredangle A$ con un segmento arbitrario $\overline{MN}$, las bisectrices de los ángulos $\measuredangle AMN$ y $\measuredangle ANM$, se cortan en B, demostrar que B es un punto en la bisectriz de $\measuredangle A$.

21. En los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ son bisectrices, de $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle B'A'C'$ respectivamente. $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

22. Sea el triángulo ΔABC, con $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, sea $F \in \overline{AB}$, $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{EF} \perp \overline{BC}$. Demostrar que $\measuredangle AFD \cong \measuredangle BFE$.

23. En los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ son medianas, de $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ respectivamente. $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

24. Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ semirrectas opuestas. $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{BD}$ incluidas en el mismo semiplano determinado por $\overleftrightarrow{AE}$. $\measuredangle ABG \cong \measuredangle KBG$ y $\measuredangle KBD \cong \measuredangle DBE$. Determinar $m\measuredangle GBD$.

25. Sean las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ opuesta a $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ opuesta a $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$ opuesta a $\overrightarrow{OF}$; con $\overrightarrow{OD}$ en el $Int(\measuredangle AOF)$, si $m\measuredangle DOF = 85^0$ y $m\measuredangle AOE = 30^0$. Determinar las medidas de los ángulos $\measuredangle AOD$, $\measuredangle BOF$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COE$.

26. Sea $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$, F entre A y B, E entre C y D, $\overrightarrow{FG}$ biseca al $\measuredangle BFE$, $\overrightarrow{EG}$ biseca al $\measuredangle DEF$. Probar que $\overline{EG} \perp \overline{FG}$.

27. En los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ son alturas que parten de los ángulos $\measuredangle BAC$ y $\measuredangle B'A'C'$ respectivamente. $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Demostrar que $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

28. Sea el triángulo ΔABC, $E \in int\overline{BC}$, unimos A con E, $D \in int\overline{AE}$, unimos D con B. Mostrar que: $\measuredangle ADB > \measuredangle ACB$

29. Sean $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos que se cortan en M, con M punto medio de ambos segmentos, probar que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$.

30. Los triángulos ΔLTN y ΔLNM tienen en común el lado $\overline{LN}$, con $\overline{LM} \cong \overline{NT}$; $\overline{LT} \cong \overline{NM}$, probar que $\overline{TN} \parallel \overline{LM}$.

31. Sea el ΔABC y sean $\overline{BD}$ y $\overline{EC}$ alturas, con D entre A y C, E entre A y B. Probar que $\measuredangle DCE \cong \measuredangle EBD$.

32. Sea ΔABC rectángulo en A, sea $D \in \overline{AC}$, $E \in \overline{AB}$ y $F \in \overline{BC}$ tales que $\overline{CD} \cong \overline{CF}$ y $\overline{BF} \cong \overline{BE}$. Demostrar que $m(\widehat{DFE}) = 45^o$.

33. Sea el triángulo ΔABC rectángulo con $\measuredangle ACB$ recto y sea $\overline{CD}$ la altura relativa a la hipotenusa. Probar que $\measuredangle CAB \cong \measuredangle DCB$, $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ABC$.

34. Calcular en función de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, el ángulo formado por la altura y la mediana que caen sobre la hipotenusa.

35. En un triángulo rectángulo, la bisectriz del ángulo recto es bisectriz del ángulo formado por la mediana y la altura relativos a la hipotenusa.

36. En un triángulo rectángulo, la altura y la mediana trazadas desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa, forman un ángulo de 24 grados. Hallar los ángulos agudos del triángulo.

37. Sea $D \in int\Delta ABC$ con

$$\measuredangle DAB \cong \measuredangle CAD,\ \measuredangle DBA \cong \measuredangle CBD;\ m\measuredangle ADB = 130^0.$$

Calcular $m\measuredangle ACB$.

38. Demostrar que la recta paralela y que pasa por el vértice opuesto a la base de un triángulo isósceles, biseca los ángulos exteriores en dicho vértice.

39. Dado un triángulo ΔABC y las bisectrices $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ de los ángulos $\widehat{B}$, $\widehat{C}$. Se traza por O el segmento $\overline{DE}||\overline{BC}$, D entre A y B, E entre A y C. Demostrar que $DE = DB + CE$.

40. Dado el triángulo ΔABC se traza la bisectriz $\overrightarrow{CD}$ (D entre A y B), luego por D se traza $\overline{DR}||\overline{CB}$ (R entre A y C). Demostrar que
$$\overline{DR} \cong \overline{RC}.$$

41. En un triángulo ΔABC, $\overline{AM}$ es la mediana correspondiente a $\overline{BC}$ y $\overline{AH}$ es la altura correspondiente a $\overline{BC}$. Si C esta entre M y H, demostrar que:
a)$\overline{AM} < \overline{AB}$; b)$\overline{AM} > \overline{AC}$; c)$\overline{AB} > \overline{AC}$; d) $\measuredangle AMB > \measuredangle AMC$.

42. En un triángulo ΔABC, las bisectrices del $\measuredangle B$ y del $\measuredangle C$ se intersectan en D. $\overline{AB} > \overline{AC}$ y $\overline{DH}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ en H. Demostrar que:
a) $\overline{BD} > \overline{CD}$; b) $\overline{BH} > \overline{CH}$.

43. En un triángulo ΔABC, D $\in$ int$\overline{BC}$ con $\overline{BD} \cong \overline{AD} \cong \overline{AC}$. Demuestre:
a) $\measuredangle ADB > \measuredangle BAD$; b) $\measuredangle ADB > \measuredangle ADC$; c)$\measuredangle ABC < \measuredangle ACB$.
d)$\overline{AB} > \overline{AC}$

44. Demostrar que si un punto no pertenece a la mediatriz de un segmento, entonces dicho punto no equidista de los extremos del segmento.

45. Demostrar que si un punto del interior de un ángulo no pertenece a la bisectriz del ángulo, dicho punto no equidista de los lados del ángulo.

46. Demostrar que la suma de las medidas de las alturas de un triángulo, esta comprendida entre el semiperímetro y el perímetro del triángulo. (Observación: El perímetro de un triángulo es la suma de las medidas de los lados del triángulo).

47. Demostrar que la suma de las medidas de las medianas de un triángulo, esta comprendida entre el semiperímetro y el perímetro del triángulo.

48. Si A, B, C, D son cuatro puntos coplanares tales que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$; $\overline{DC} \cong \overline{BC}$; $\overline{AD} < \overline{DC}$. Demostrar que $\measuredangle DCB < \measuredangle BAD$.

49. Sea M un punto en el interior de un triángulo ΔABC, probar que:
$$m\overline{BM} + m\overline{MC} < m\overline{AB} + m\overline{AC}.$$

50. Si $\overline{AM}$ es mediana del $\triangle ABC$ entonces:

$$\frac{1}{2}(m(\overline{AB}) - m(\overline{AC})) < m(\overline{AM}) < \frac{1}{2}(m(\overline{AB}) + m(\overline{AC})).$$

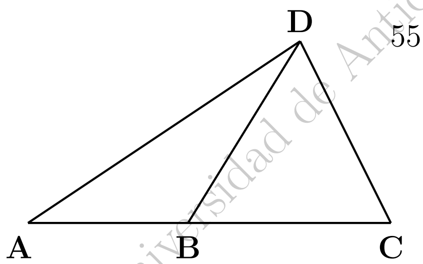
Sugerencia: en $\overrightarrow{AM}$ existe D tal que $\overline{MD} \cong \overline{AM}$ y $A - M - D$.

51. En el $\triangle ABC$ se tienen: $A-F-C$ y $A-D-B$, $\overline{FC} \cong \overline{DB}$, $\overline{AB} > \overline{AC}$, entonces se cumple que $\overline{FB} > \overline{CD}$.

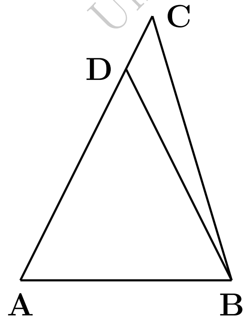
52. Demuestre que en un triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual que la mitad de la hipotenusa. Bajo que condición se cumple que la altura sea igual a la mitad de la hipotenusa?.

53. Si $B \in \Pi_{l:A}$, localizar con regla y compás un punto C sobre la recta l, tal que la medida $AC + CB$ sea mínima. Justificar el procedimiento seguido en la construcción.

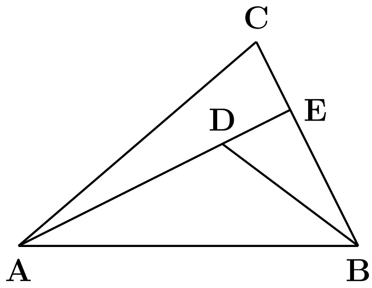
54. Dados dos puntos A y B en el $Int\widehat{XOY}$, localizar con regla y compás dos puntos P y Q sobre $\overrightarrow{OX}$ y $\overrightarrow{OY}$ respectivamente, de tal manera que $AP + PQ + QB$ sea mínima. Justificar el procedimiento seguido en la construcción.



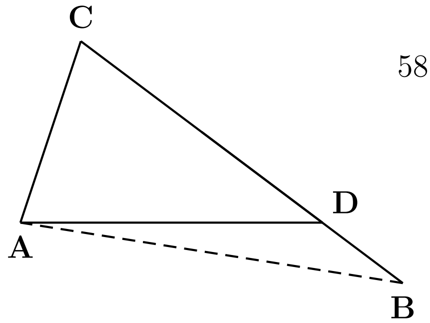
55. H: $\overline{DC} \cong \overline{BC}$, $A - B - C$.
T: $\widehat{ADC} > \widehat{A}$; $\overline{AD} > \overline{BD}$; $\overline{AC} > \overline{DC}$; $\widehat{CDB} > \widehat{A}$.



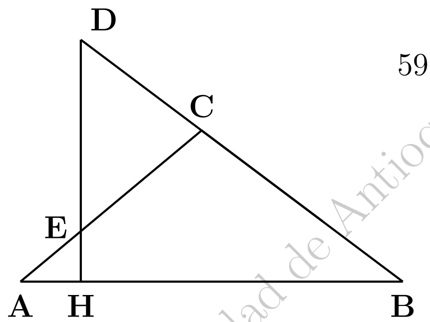
56. H: $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, $A - D - C$, $\overline{AB} < \overline{AD}$.
T: $\widehat{C} < \widehat{A}$



57. H: $\triangle ABC$; $A-D-E$; $B-E-C$.
    T: $\widehat{ADB} > \widehat{C}$



58. H: $\triangle ACD$ isósceles con $\overline{CD} \cong \overline{AD}$; $\overline{AC} < \overline{DC}$; $B \in \overleftrightarrow{CD}$ tal que $C-D-B$
    T: $\triangle CAB$ escaleno.



59. Si en la figura $\overline{AC} \cap \overline{DH} = \{E\}$ y C esta entre D y B, $H \in \overline{AB}$, $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, $\overline{DC} \cong \overline{CE}$, entonces $\overline{DH} \perp \overline{AB}$.

60. Se prolonga la mediana $\overline{AM}$ de un triángulo ABC, una longitud $MD = AM$. Se traza $\overline{BD}$. Mostrar que $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$.

61. Demostrar que la medida del ángulo formado por dos bisectrices interiores de un triángulo es igual a la medida del ángulo recto más la mitad de la medida del ángulo en el tercer vértice.

62. En el $\triangle ABC$ se tiene que $BC = 2a$, $AB = a$ y $m(\widehat{B}) = 60^o$. Demostrar que $m(\widehat{A}) = 90^o$.

63. Demostrar que si las mediatrices de dos lados de un triángulo se interceptan en un punto que pertenece al tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo.

64. Sean dos ángulos adyacentes suplementarios $\widehat{XOY}$ y $\widehat{XOZ}$ y sus bisectrices respectivas $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$. De un punto A de $\overrightarrow{OX}$ se baja una perpendicular sobre $\overrightarrow{OM}$ y otra perpendicular sobre $\overrightarrow{ON}$ que cortan a $\overleftrightarrow{YOZ}$ en B y en C:

    a) Comparar $\widehat{MON}$ y $\widehat{BAC}$; deducir que el triángulo ABC es rectángulo.

    b) Mostrar que los triángulos OAB y OAC son isósceles.

    c) Deducir que el punto O es el punto medio de $\overline{BC}$.

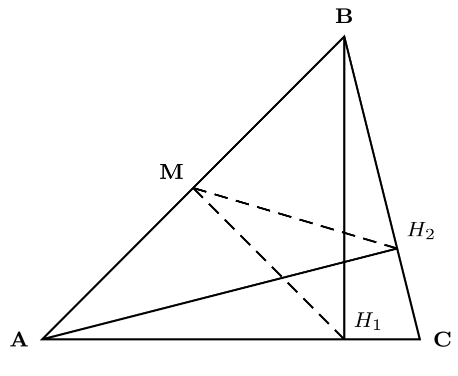
65. Sea $\triangle ABC$ isósceles tal que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Sean $\overline{BH}$ la altura relativa al lado $\overline{AC}$ y P un punto cualquiera sobre $\overline{BC}$. Se trazan las perpendiculares $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.Pruebe que $PM + PN = BH$.

66. En el ΔABC, se tiene que $\overline{BB'} \perp \overline{AC}$, $\overline{B'C''} \perp \overline{AB}$, $\overline{CC'} \perp \overline{AB}$ y $\overline{C'B''} \perp \overline{AC}$ entonces $\overline{C''B''} \,||\, \overline{BC}$.

67. La suma de las distancias de un punto interior de un triángulo a los vértices es menor que el perímetro (perímetro es la suma de los lados del triángulo) y mayor que el semi-perímetro (es la mitad del perímetro).

68. En un triángulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$, se toman sobre los lados dos segmentos congruentes $\overline{BM}, \overline{CN}$: entonces $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

69. Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$ en el $\triangle ABC$ y sean $\overline{AH_2}$ y $\overline{BH_1}$ alturas. Mostrar que $\triangle H_1MH_2$ es isósceles.(Ver figura) y $\widehat{H_1H_2C} \cong \widehat{BAC}$ y $\widehat{H_2H_1C} \cong \widehat{ABC}$



70. Identificar el lugar geométrico en el plano, de los vértices A de los $\triangle ABC$ con el lado $\overline{BC}$ fijo y tal que la mediana $\overline{AM}$ relativa al lado $\overline{BC}$, sea congruente con $\overline{AC}$. Justificar la respuesta.

71. Identificar el lugar geométrico en el plano, de los puntos medios de todos los segmentos cuyos extremos estan sobre dos rectas paralelas dadas. Justificar la respuesta.

72. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30^0, la mediana y la altura relativas a la hipotenusa dividen el ángulo recto en tres ángulos iguales.

73. Las bisectrices de los ángulos de la base de un triángulo isósceles forman al interceptarsen un ángulo cuya medida es tres veces la medida del ángulo en el vértice. Hallar la medida de los ángulos del triángulo. (**Rta.:** ángulo en el vértice mide 36^o, ángulos de la base miden 72^o)

74. En un triángulo rectángulo, la mediana y la altura que parten del ángulo recto forman un ángulo de 24^o. Hallar las medidas de los ángulos agudos de dicho triángulo.

75. Construir un triángulo dados los puntos medios de los tres lados.

76. En el triángulo ΔABC, h_a es la altura desde el vértice A, m_a es la mediana desde el vértice A y v_a es la bisectriz desde el vértice A, a es la medida del lado $\overline{BC}$, b es la medida del lado $\overline{AC}$, c es la medida del lado $\overline{AB}$, α es la medida del ángulo en el vértice A, β es la medida del ángulo en el vértice B, γ es la medida del ángulo en el vértice C. Construir un triángulo ΔABC dados:
    (a) $h_a,\ a,\ b$; (b)$h_a,\ b,\ c$; (c)$h_a,\ b,\ \beta$; (d) $h_a,\ \beta,\ \gamma$;
    (e) $h_a,\ a,\ \beta$; (f)$h_a,\ b,\ \alpha$; (g)$m_a,\ a,\ b$; (h) $m_a,\ b,\ \gamma$;
    (i) $m_a,\ a,\ \beta$; (j) $v_a,\ \alpha,\ \beta$; (k) $v_a,\ b,\ \alpha$; (l) $v_a,\ b,\ \gamma$;
    (m) $a,\ h_a,\ m_a$; (n) $c,\ h_a,\ m_a$.

CAPÍTULO 5

POLIGONALES Y POLÍGONOS

5.1. INTRODUCCIÓN

Definición 33. *Sean en el plano los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $n \geq 3$, con la condición de que tres puntos consecutivos no son colineales.*

La unión de los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$, se llama POLIGONAL, (Figura 1.a).

Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se llaman VÉRTICES DE LA POLIGONAL. Los segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}$ se llaman LADOS DE LA POLIGONAL.

Si se une A_n con A_1 se obtiene una poligonal cerrada llamada POLÍGONO, (Figura 1.b,...,1.g).
Los lados del polígono constituyen EL CONTORNO O LA FRONTERA DEL POLÍGONO.

La suma de las medidas de los lados del polígono se llama PERÍMETRO DEL POLÍGONO.

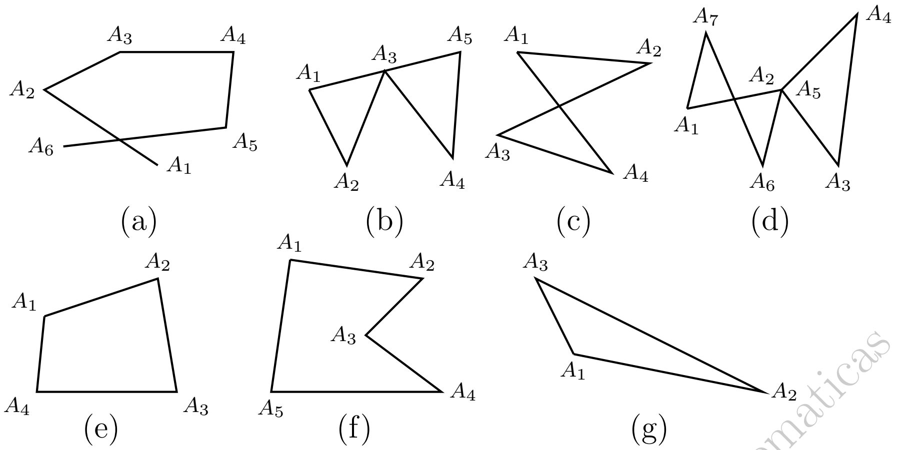


Figura 1.

Definición 34 (Polígono simple). *Un polígono se llama SIMPLE si:*

i) Todos los vértices son distintos. (la Figura 1.d no lo es).

ii) Los lados se intersectan solamente en los vértices. (la Figura 1.c no lo es).

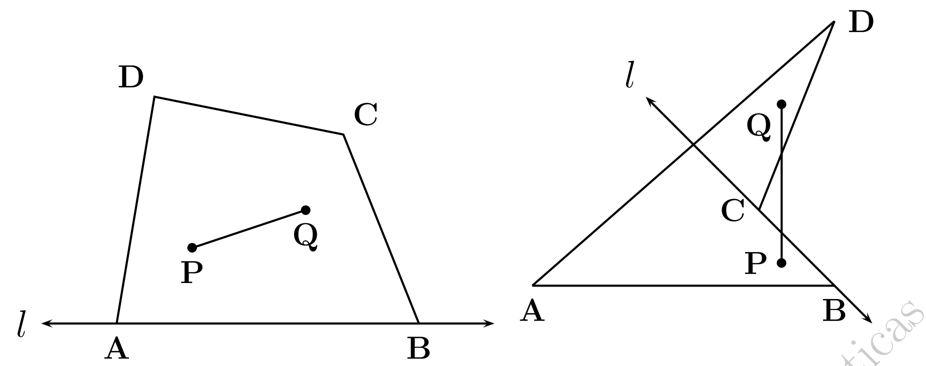
iii) Ningún vértice está en el interior de un lado. (la Figura 1.b no lo es).

Nota: en el conjunto de todos los polígonos simples nos interesa un subconjunto, que le daremos el nombre de polígonos C-simples.

Definición 35.

i) Un polígono simple se denomina **C-simple** *si para* <u>*todo*</u> *lado del polígono se cumple que la recta l que contiene al lado determina un semiplano que contiene a los demás vértices del polígono. (Figura 2.a). La intersección de todos estos semiplanos (que es una figura convexa) se le llama el interior del polígono C-simple.*
Un punto perteneciente al interior del polígono C-simple se le llama punto interior del polígono. Como el interior de los polígonos C-simples es convexo, convendremos en llamar, de aquí en adelante, a estos polígonos C-simples como polígonos CONVEXOS

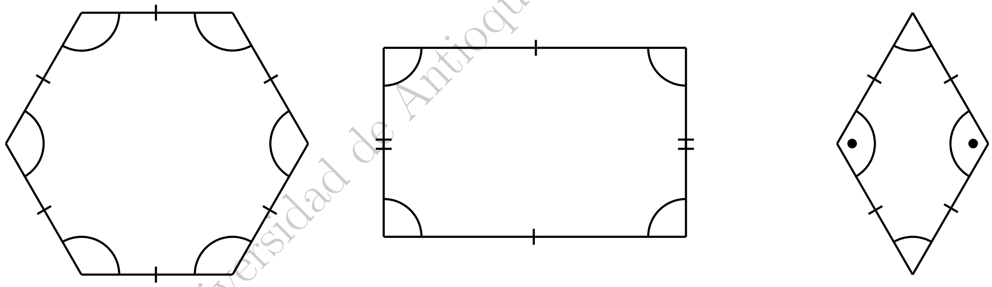
ii) Un polígono no C-simple, se llama **CÓNCAVO** *(Figura 2.b).*



(a) Convexo o C-simple **(b) Concavo**

Figura 2.

iii) Un polígono convexo que tiene sus ángulos y lados congruentes se llama **REGULAR** *(Figura 3.a).*



(a) Regular **(b) Irregular** **(c) Irregular**

Figura 3.

Si no cumple alguna de estas condiciones es **IRREGULAR**, *(Figura 3.b y 3.c).*

iv) Un punto Q se denomina **PUNTO EXTERIOR** *de un polígono convexo, si no es punto frontera y si no es punto interior.*

v) El conjunto de puntos exteriores se llama **EXTERIOR** *del polígono.*

Ejercicio: demostrar que el interior de un polígono **C-simple** es un conjunto no vacío.
Ejercicio: para todo P, Q en el interior de un polígono **C-simple** se cumple que $\overline{PQ}$ es subconjunto del interior del polígono.(Ver Figura 2. (a))
Ejercicio: para todo X, Y pertenecientes al polígono **C-simple** se cumple que $Int\{\overline{XY}\}$ intersectado con el polígono es el conjunto vacío.

Definición 36.

i) El segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono se le llama **DIAGONAL DEL POLÍGONO**.

ii) El ángulo formado por dos lados consecutivos de un polígono convexo se le llama **ÁNGULO DEL POLÍGONO**.

iii) Los ángulos que forman un par lineal con los ángulos de un polígono convexo se llaman **ÁNGULOS EXTERIORES DEL POLÍGONO**.

Así, en la Figura 4., $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diagonales; $\widehat{FAE}$, $\widehat{IBA}$, $\widehat{HCB}$, $\widehat{GDC}$, etc. son ángulos exteriores del polígono.

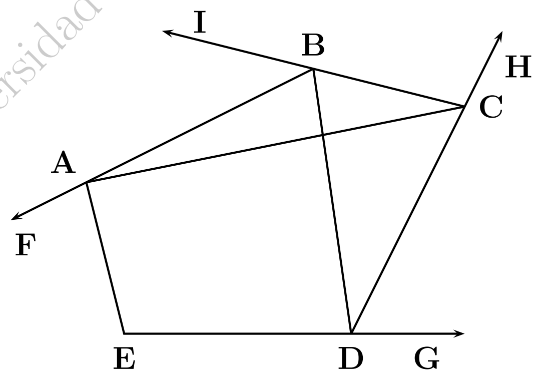


Figura 4.

Nombres de algunos polígonos	
Nombre	Número de lados
Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octágono	8 lados
Nonágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endodecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados

Teorema 57.
El número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Demostración. Por cada vértice P de un polígono de n vértices se pueden trazar $(n-3)$ diagonales. Como hay n vértices se obtienen en total $n(n-3)$ diagonales. Por el método de conteo que adoptamos, cada diagonal se cuenta dos veces, por lo tanto se tiene: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Luego: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ ■

Ejemplos:
$n = 5 \Rightarrow d = \frac{5(5-3)}{2} = 5$, (ver Figura 5.).

$n = 7 \Rightarrow d = \frac{7(7-3)}{2} = 14$, (ver Figura 5.).

Teorema 58.
La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo, es igual a tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos. Es decir, si n es el número de lados del polígono, entonces:

$$s = 180(n-2)$$

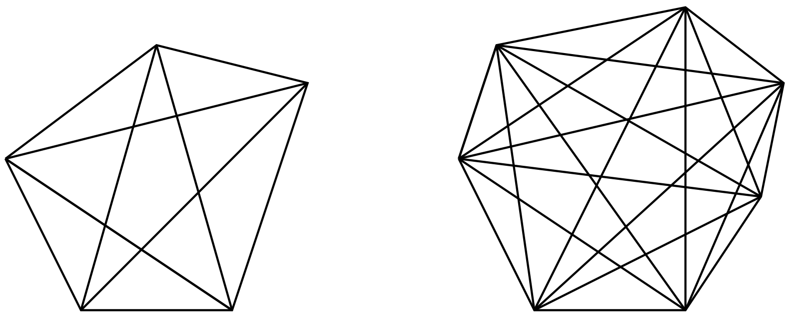


Figura 5.

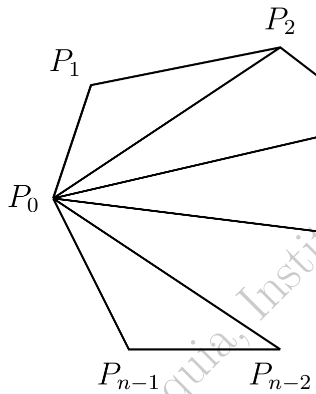


Figura 6.

Demostración. (Ver Figura 6.).

$$\text{Número de triángulos de vértice } P_0 \quad \begin{cases} \triangle P_0\, P_1\, P_2 \\ \triangle P_0\, P_2\, P_3 \\ \triangle P_0\, P_3\, P_4 \\ \quad\vdots \\ \triangle P_0\, P_{n-2}\, P_{n-1} \end{cases}$$

Total: $(n-2)$ triángulos.

Luego, suma de los ángulos interiores del polígono:

$$P_0\, P_1\, P_2 \ldots P_{n-2}\, P_{n-1} = 180(n-2) \qquad \blacksquare$$

Corolario 23. *Si un polígono es equiángulo, entonces el valor de un ángulo* *interior es:*

$$\frac{180^0(n-2)}{n}$$

Corolario 24. *En un polígono convexo, la suma de los ángulos exteriores tomados en un mismo sentido es dos llanos.*

CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

1. Según sus lados:
a) ISÓSCELES: tiene dos lados congruentes.
b) EQUILÁTERO : tiene tres lados congruentes.
c) ESCALENO : no tiene lados congruentes.

2. Según sus ángulos:
a) EQUIÁNGULO: sus tres ángulos son congruentes.
b) RECTÁNGULO: tiene un ángulo recto.
c) ACUTÁNGULO: tiene sus tres ángulos agudos.
d) OBTUSÁNGULO: uno de sus ángulos es obtuso.

5.2. CUADRILÁTEROS

Definición 37. .

a) **TRAPECIO** : es un cuadrilátero convexo con un par de lados paralelos (Figura 7.a).

b) **PARALELOGRAMO** : es un cuadrilátero convexo con dos pares de lados paralelos (Figura 7.b).

c) **RECTANGULO** : cuadrilátero convexo que tiene sus cuatro ángulos congruentes (Figura 7.c).

d) **ROMBO** : cuadrilátero convexo que tiene sus lados congruentes (Figura 7.d).

e) **CUADRADO**: cuadrilátero convexo que es equiángulo y equilátero a la vez (Figura 7.e).

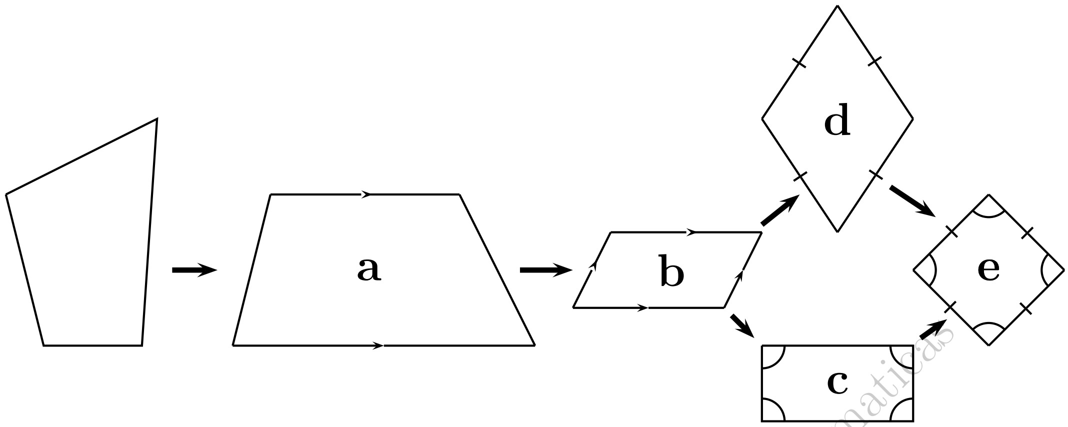


Figura 7.

El significado de la Figura 7. es el siguiente: las propiedades del cuadrilátero las hereda el trapecio; las propiedades del trapecio las hereda el paralelogramo y así sucesivamente.

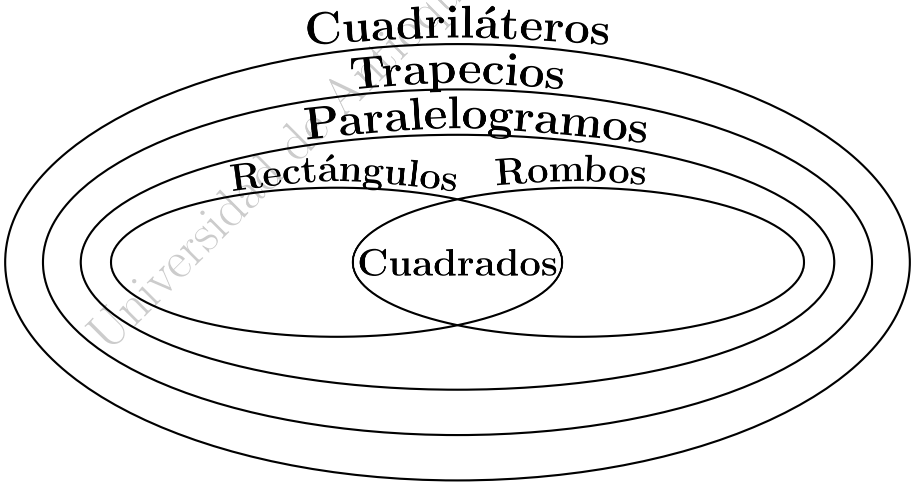


Figura 8.

El significado de la Figura 8. es el siguiente: el cuadrado tiene las propiedades del rectángulo y del rombo. El rombo y el rectángulo tienen las propiedades del paralelogramo y así sucesivamente.

Teorema 59.

Todo rectángulo y todo rombo es paralelogramo.

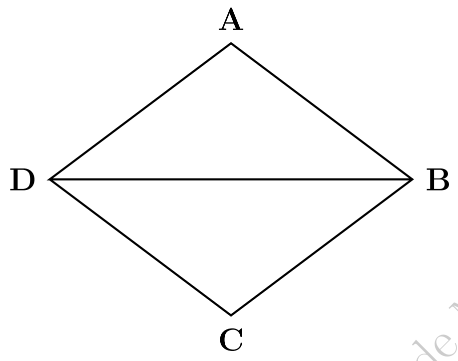


Figura 9.

Demostración. (Ver Figura 9.). Demostraremos que todo rombo es paralelogramo. Se deja al lector la demostración de que todo rectángulo es paralelogramo.

Sea $ABCD$ un rombo, luego:

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$ por definición.
Tracemos la diagonal $\overline{DB}$, entonces:

$$\triangle ADB \cong \triangle CBD, \quad (L-L-L)$$

De donde: $\widehat{ADB} \cong \widehat{CBD} \quad (1)$
$\widehat{CDB} \cong \widehat{ABD} \quad (2)$

Según (1), $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y según (2), $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, luego el rombo es un paralelogramo. ■

Corolario 25. *i) El rectángulo es un paralelogramo equiángulo.*
ii) El rombo es un paralelogramo equilátero.
iii) El cuadrado es rectángulo y rombo a la vez.

Teorema 60 (Propiedades del paralelogramo).

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *Un cuadrilátero convexo es un paralelogramo.*
2. *Un par de lados opuestos del cuadrilátero son paralelos y congruentes.*
3. *Los lados opuestos del cuadrilátero son congruentes.*
4. *Las diagonales del cuadrilátero se bisecan.*
5. *Los ángulos opuestos del cuadrilátero son congruentes.*
6. *Un par de lados del cuadrilátero son paralelos y un par de ángulos opuestos son congruentes.*
7. *Si para cada lado los ángulos adyacentes son suplementarios.*

NOTA: (ver Figura 10.). Identifique cada caso.

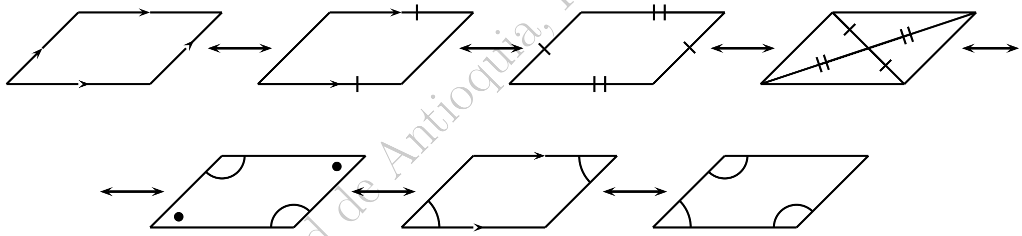


Figura 10.

Demostración. La demostración de este teorema consiste en probar la siguiente cadena de implicaciones, así:

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$$

Haremos aquí la prueba de la primera y la última implicaciones.
i) $1 \Rightarrow 2$. (Figura 11.).

Sea $ABCD$ un paralelogramo con $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.
Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se obtienen dos triángulos congruentes $\triangle ABC$ y

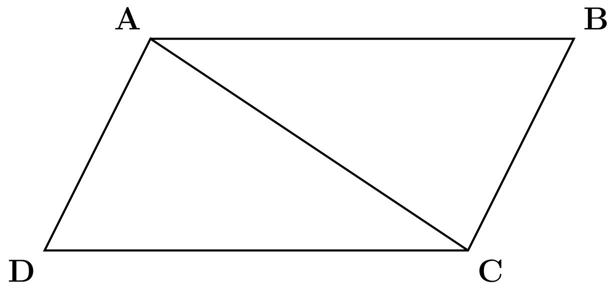


Figura 11.

$\triangle DCA$ por tener: $\widehat{CAD} \cong \widehat{ACB}$ (alternos internos), $\widehat{DCA} \cong \widehat{CAB}$ (alternos internos), $\overline{AC}$ (lado común).
Luego $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (por hipótesis).
De la misma congruencia de triángulos se concluye también que:
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (por hipótesis).
ii) $7 \Rightarrow 1$, (ver Figura 12.).

Figura 12.

Supongamos que en el cuadrilátero convexo $ABCD$ los ángulos adyacentes $\widehat{DAB}$ y $\widehat{ADC}$ son suplementarios, es decir:

$$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ADC}) = 2 \textit{ rectos} \qquad (1)$$

Sea X un punto en $\overrightarrow{BA}$, con A entre X y B, por tanto:

$$m(\widehat{DAX}) + m(\widehat{DAB}) = 2 \textit{ rectos} \qquad (2)$$

De (1) y (2): $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{DAX}) + m(\widehat{DAB})$, de donde: $\widehat{ADC} \cong \widehat{DAX}$ y por ser alternos internos se concluye que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
En la misma forma se toma Y en la semirrecta $\overrightarrow{BC}$, tal que C está entre B y Y y se llega a la conclusión de que $\widehat{ADC} \cong \widehat{YCD}$ y por la misma razón se concluye que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, luego la figura es un paralelogramo. ■

Teorema 61 (Teorema del baricentro).

Las medianas en un triángulo son concurrentes en un punto, que está a un tercio de cada lado y a dos tercios del vértice sobre cada mediana. (A este punto se le llama el baricentro).

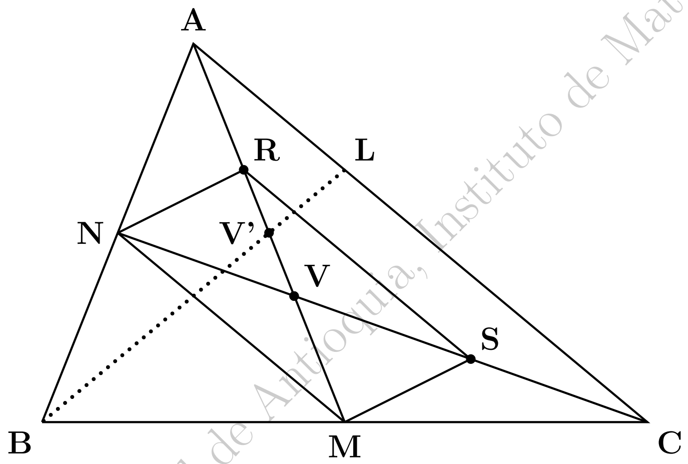


Figura 13.

Demostración. (Ver Figura 13.). La estrategia de la demostración será:
i) Mostrar que dos medianas se cortan en un punto V, el cual está a un tercio de la base y a dos tercios del vértice en cada mediana.
ii) Tomar la mediana que no se tuvo en cuenta en i) y una de las medianas que si se tomo en cuenta en i) y suponer que se cortan en V', para finalmente concluir que $V \equiv V'$.

Veamos i). Por el Teorema 7. y el corolario 1.: $\overrightarrow{CN} \subset Int\widehat{C}$, y por el Teorema de la barra transversal, existe $\{V\} = \overline{AM} \cap \overrightarrow{CN}$; similarmente, por el Teorema 7., corolario 1., teorema de la barra transversal y Teorema 1.

$\{V\} = \overline{CN} \cap \overrightarrow{AM}$ luego $\{V\} = \overline{AM} \cap \overline{CN}$. Sea R el punto medio de $\overline{AV}$ y S el punto medio de $\overline{CV}$; M el punto medio de $\overline{BC}$ y N el punto medio de $\overline{AB}$.
Por el teorema de la paralela media en el $\triangle AVC$: $\overline{RS} \parallel \overline{AC}$.
Por el teorema de la paralela media en el $\triangle ABC$: $\overline{NM} \parallel \overline{AC}$.
Luego, $\overline{RS} \parallel \overline{NM}$.
Por el teorema de la paralela media en el $\triangle BVC$: $\overline{SM} \parallel \overline{BV}$.
Por el teorema de la paralela media en el $\triangle BVA$: $\overline{NR} \parallel \overline{BV}$.
Luego, $\overline{SM} \parallel \overline{NR}$.
De lo anterior se concluye que $NRSM$ es un paralelogramo y como en un paralelogramo las diagonales se bisecan, entonces $\overline{VS} \cong \overline{VN}$ y $\overline{VR} \cong \overline{VM}$ y como R es punto medio de $\overline{AV}$, entonces $\overline{AR} \cong \overline{RV} \cong \overline{VM}$, por tanto:

$$VM = \frac{1}{3}\,AM = \frac{1}{3}\,m_a$$
$$VA = \frac{2}{3}\,AM = \frac{2}{3}\,m_a,$$

También, como S es punto medio de $\overline{VC}$, entonces $\overline{CS} \cong \overline{SV} \cong \overline{VN}$ y por tanto

$$VN = \frac{1}{3}\,CN = \frac{1}{3}\,m_c$$
$$VC = \frac{2}{3}\,CN = \frac{2}{3}\,m_c$$

Veamos ii): Supongamos que la mediana $\overline{AM}$ se intercepta con la nueva mediana $\overline{BL}$ en V'. Como el resultado de la parte i) es valedero para estas dos medianas que se cortan en V', entonces $AV' = \frac{2}{3}\,m_a$ y por la parte i) $AV = \frac{2}{3}\,m_a$, entonces $AV' = AV$, o sea que $\overline{AV'} \cong \overline{AV}$ y como V y V' están en la semirrecta $\overrightarrow{AM}$, entonces por el Axioma de construcción de segmento $V \equiv V'$. ■

Teorema 62 (Propiedades del rectángulo).

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *Un cuadrilátero convexo es un rectángulo.*
2. *Todos sus ángulos son rectos.*
3. *Las diagonales son congruentes y se bisecan.*

Demostración. Demostraremos que $1 \Rightarrow 2$ y que $3 \Rightarrow 1$.
i) $1 \Rightarrow 2$, (ver Figura 14.).

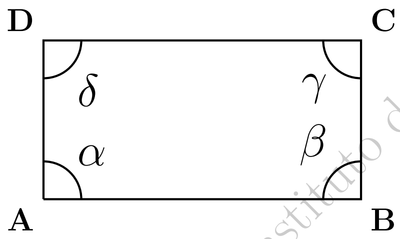


Figura 14.

Por hipótesis tenemos que $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
Como $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$, resulta entonces que:
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^0$.

ii) $3 \Rightarrow 1$, (ver Figura 15.).

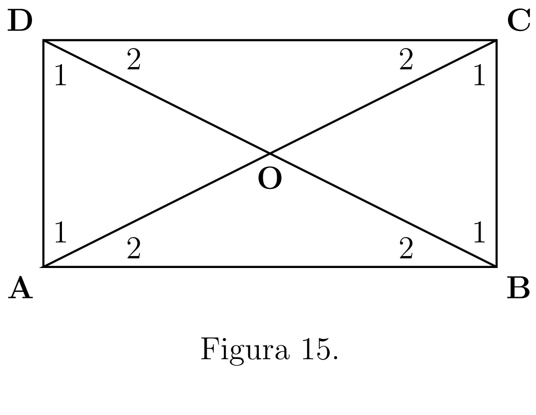


Figura 15.

Tenemos por hipótesis que:

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}.$$

Si $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (L-A-L), resulta que $\widehat{A_2} \cong \widehat{C_2}$ y $\widehat{B_2} \cong \widehat{D_2}$.

Si $\triangle AOD \cong \triangle COB$ (L-A-L), resulta que $\widehat{D_1} \cong \widehat{B_1}$ y $\widehat{A_1} \cong \widehat{C_1}$.

Sumando: $m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{C_2}) + m(\widehat{C_1})$ y
$m(\widehat{D_1}) + m(\widehat{D_2}) = m(\widehat{B_1}) + m(\widehat{B_2})$,
resulta entonces que $\widehat{A} \cong \widehat{C}$ y $\widehat{D} \cong \widehat{B}$, pero como $\widehat{D_9} \cong \widehat{A_1}$ y $\widehat{B_2} \cong \widehat{A_2}$, se concluye que $\widehat{A} \cong \widehat{C}$ y $\widehat{D} \cong \widehat{B}$.

Pero como $\widehat{D_1} \cong \widehat{A_1}$ y $\widehat{B_2} \cong \widehat{A_2}$, se concluye que $\widehat{A} \cong \widehat{B} \cong \widehat{C} \cong \widehat{D}$, pues $\widehat{D_1} \cong \widehat{A_1} \cong \widehat{B_1}$ y $\widehat{B_2} \cong \widehat{A_2} \cong \widehat{D_2}$.
Se deja al lector la prueba de que $2 \Rightarrow 3$. ■

Teorema 63 (Propiedades del rombo).

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *Un paralelogramo es un rombo.*
2. *Las diagonales del paralelogramo bisecan los ángulos opuestos.*
3. *Las diagonales del paralelogramo son perpendiculares.*
4. *Dos lados adyacentes del paralelogramo son congruentes.*

Demostración. Demostraremos que $1 \Rightarrow 2$ y que $4 \Rightarrow 1$.

i) $1 \Rightarrow 2$, (ver Figura 16.).
Por hipótesis tenemos que $ABCD$ es paralelogramo con

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}.$$

Como $\triangle DCB \cong \triangle DBA$ por (L-L-L) y
$\triangle CDA \cong \triangle CBA$ por (L-L-L), resulta:
$\widehat{CDO} \cong \widehat{ODA}$, $\widehat{CBO} \cong \widehat{ABO}$, $\widehat{DCO} \cong \widehat{BCO}$, $\widehat{BAO} \cong \widehat{DAO}$. (Porque ?)
ii) $4 \Rightarrow 1$.
Tenemos por hipótesis que $ABCD$ es paralelogramo y que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.

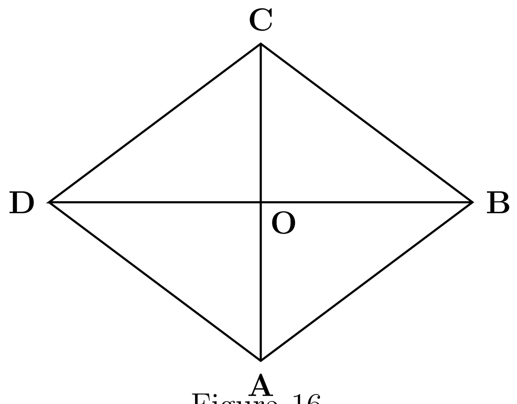


Figura 16.

Entonces, por ser $ABCD$ paralelogramo se tiene: $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, pero como $\overline{AD} \cong \overline{AB}$, resulta:

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 64 (Propiedades del trapecio).

i) La base media de un trapecio (segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio), es paralela a las bases y su medida es la semisuma de las medidas de las bases.

ii). El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases, su medida es la semidiferencia de las medidas de las bases y esta contenido en la base media (Demostrarlo).

iii) En un trapecio isósceles, el cual tiene los lados no paralelos congruentes, las diagonales son congruentes, los ángulos de la base mayor son congruentes, los ángulos de la base menor son congruentes. El punto de intersección de las diagonales, los puntos medios de las bases y el punto de intersección de las rectas que contienen los lados no paralelos, estan alineados. Las mediatrices de las bases coinciden. (Demostrarlo).

Demostración. (Ver Figura 17.). Por hipótesis, $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, $\overline{DK} \cong \overline{KA}$ y $\overline{CE} \cong \overline{EB}$.

Demostremos que:

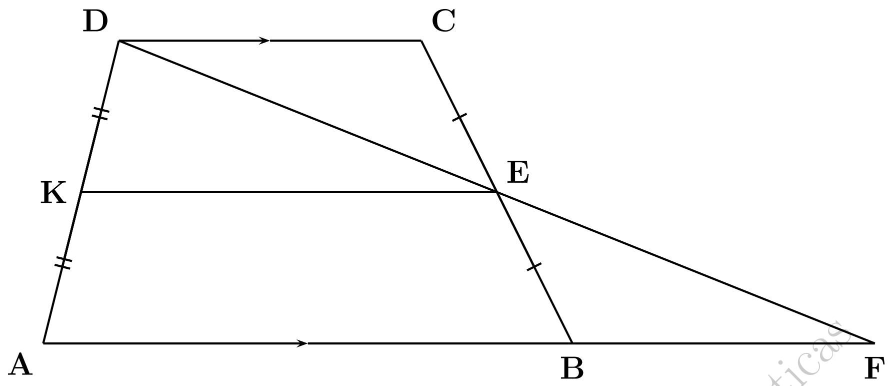


Figura 17.

$$KE = \frac{1}{2}\,(DC + AB).$$

Si unimos D con E y prolongamos hasta encontrar la prolongación de $\overline{AB}$, tal que B está entre A y F, resulta que $\triangle DCE \cong \triangle FBE$ por (A-L-A), entonces

$$\overline{DE} \cong \overline{EF} \quad y \quad \overline{DC} \cong \overline{BF}.$$

En $\triangle DAF$ se tiene $\overline{KD} \cong \overline{KA}$ y $\overline{DE} \cong \overline{EF}$, por lo tanto $\overline{KE} \parallel \overline{AF}$ y

$$KE = \frac{1}{2}\,(AF) = \frac{1}{2}\,(AB + DC).$$

ii) y iii) se dejan como ejercicio. ■

5.3. Ejercicios y Problemas de Polígonos

1. Dado el cuadrado $ABCD$, se construye en el interior del cuadrado el triángulo equilátero $\triangle ABF$ y en el exterior del cuadrado, el triángulo equilátero $\triangle ADE$. Demostrar que C, F y E son colineales.

2. En un paralelogramo $ABCD$, se prolonga $\overline{AB}$ hasta E tal que $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ y se prolonga $\overline{AD}$ hasta F tal que $\overline{DF} \cong \overline{DC}$. Demostrar que $\widehat{DCF} \cong \widehat{BCE}$ y F, C y E son colineales.

3. Si $ABCE$ es un rectángulo y $\overline{AF} \perp \overline{BE}$ con $F \in \overline{BE}$ y $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz de $\widehat{CAF}$. Mostrar que $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz de $\widehat{BAE}$, hallar $m(\widehat{ADE})$.
(**Rta.:** 45^o)

4. Demostrar que el perímetro de un cuadrilátero es mayor que la suma de las diagonales.

5. Sea $ABCD$ un cuadrado tal que E esta entre B y C, E esta entre D y F , B esta entre A y F. Demostrar que $\overline{AC} < \overline{DF}$.

6. Probar que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, son los vértices de un paralelogramo.

7. Probar que los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales, son los vértices de un paralelogramo.

8. Probar que los puntos medios de los lados de un rombo, son los vértices de un rectángulo.

9. Probar que los puntos medios de los lados de un rectángulo, son los vértices de un rombo.

10. Probar que las bisectrices de los ángulos interiores de un paralelogramo, al intersectarse forman un rectángulo.

11. Probar que las bisectrices de los ángulos interiores de un rectángulo, al intersectarse forman un cuadrado.

12. Demostrar que si por el punto de intersección de las diagonales de un rombo se trazan perpendiculares a los lados del rombo, entonces

los puntos de intersección de dichas perpendiculares con los lados del rombo son los vértices de un rectángulo.

13. Demostrar que las bisectrices de los ángulos que forman las diagonales de un rombo, intersectan los lados del rombo en cuatro puntos que son los vértices de un cuadrado.

14. Demostrar que la base media de un trapecio biseca las diagonales.

15. Demostrar que las diagonales de un pentágono regular son congruentes y al intersectarsen forman un pentágono regular.

16. Sea $ABCD$ un paralelogramo. $\overrightarrow{AN}$ bisectriz de $\measuredangle BAD$ y $\overrightarrow{DM}$ bisectriz de $\measuredangle CDA$. $M \in \overline{AB}$ $N \in \overline{CD}$. Demostrar que $ADNM$ es un rombo.

17. Si sobre los lados de un paralelogramo tomados como hipotenusas se dibujan triángulos rectángulos isósceles y los triángulos rectángulos son exteriores al paralelogramo. Probar que los cuatro vértices de los ángulos rectos forman un cuadrado.

18. Mostrar que en un paralelogramo, el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos es partida en parte congruentes por el punto de intersección de las diagonales.

19. En un cuadrado $ABCD$ se toman sobre los lados $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ segmentos congruentes $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$; se unen B con M y A con N. Mostrar que $\overline{AN} \perp \overline{BM}$

20. En un cuadrilátero $ABCD$, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ y $\measuredangle DAB \cong \measuredangle CBA$ y no rectos. Demostrar que $ABCD$ es un trapecio isósceles.

21. Demostrar que si se trisecan los tres lados de un triángulo equilátero, entonces estos puntos son los vértices de un hexágono regular.

22. El polígono $ABCDEFGH$ es un octágono regular. Demostrar que las diagonales $\overline{AD}$, $\overline{HE}$, $\overline{BG}$ y $\overline{CF}$ forman un cuadrado al intersectarse.

23. En el cuadrilátero $ABFE$ la diagonal $\overline{AF}$ es mediatriz de $\overline{BE}$. Las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$ se cortan en C y las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ se cortan en D. Demostrar que $\overline{CD}$ y $\overline{BE}$ son paralelas.

24. Sea $ABFH$ un paralelogramo, D un punto exterior al paralelogramo, E punto medio de $\overline{DF}$, C punto medio de $\overline{DB}$, K punto medio de $\overline{AH}$. Si $\{O\} = \overline{EK} \cap \overline{CH}$, demostrar que O es punto medio de $\overline{EK}$ y $\overline{CH}$.

25. En un paralelogramo $ABDE$, $m\overline{BD} = 2m\overline{AB}$ y C es el punto medio de $\overline{BD}$. Demostrar que el ángulo $\measuredangle ACE$ es recto.

26. Demuestre que cualquier segmento que pase por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo queda bisecado por dicho punto.

27. Sea ΔABC , $D \in int\overline{AC}$, tal que $\overline{AD} \cong \overline{DB}$; $\overline{AB} < \overline{AD}$. Demostrar que ΔABC es escaleno.

28. Sea $ABCD$ un paralelogramo, donde la bisectriz de $\measuredangle DAB$ corta a $\overline{CD}$ en Q y a la prolongación de $\overline{BC}$ en N; la bisectriz de $\measuredangle BCD$ corta a $\overline{AB}$ en P y a la prolongación de $\overline{DA}$ en M. Demuestre que $AMCN$ es un paralelogramo.

29. $ABCD$ es un rectángulo. $\overline{AX}$ y $\overline{DX}$ son las bisectrices de A y D respectivamente. $\overline{BY}$ y $\overline{CY}$ son las bisectrices de B y C respectivamente. Demuestre que $ABYX \cong CDXY$.

30. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$. Además $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ y $\overline{CO} \cong \overline{OD}$. Demostrar que $ABCD$ es un trapecio isósceles.

31. Por el punto de intersección de las diagonales de un cuadrado, se trazan dos rectas perpendiculares que intersectan dos a dos los lados del cuadrado. Demostrar que estos puntos de intersección son los vértices de un cuadrado.

32. Sea $ABCD$ un paralelogramo, l una recta cualquiera que pasa por D y no cruza el interior del paralelogramo, $\overline{AN} \perp l$, $\overline{BM} \perp l$ y $\overline{CP} \perp l$ en los puntos N, M y P respectivamente. Demostrar que
$$m\overline{BM} = m\overline{AN} + m\overline{CP}.$$
Analice el caso cuando la recta l cruza el interior del paralelogramo.

33. En un rombo $ABCD$ se trazan $\overline{BN} \perp \overline{AD}$, $\overline{BM} \perp \overline{CD}$, $\overline{DR} \perp \overline{AB}$, $\overline{DQ} \perp \overline{BC}$. Estas perpendiculares se cortan en E y F. Demostrar que $BEDF$ es un rombo y que sus ángulos son congruentes a los ángulos del rombo dado.

34. En un cuadrado $ABCD$ se prolongan los lados en un mismo sentido y sobre dichas prolongaciones se toman $\overline{BM} \cong \overline{AB}$, $\overline{DN} \cong \overline{CD}$, $\overline{CF} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AQ} \cong \overline{AD}$. Demostrar que $\overline{MN} \cong \overline{FQ}$ y que $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$.

35. En un triángulo ΔABC, se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. Por N, se traza una paralela a $\overline{BC}$ y por C, una paralela a $\overline{BN}$. Estas dos rectas se cortan en P. Si D es el punto medio de $\overline{PN}$, demostrar que $\overline{CD} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{MN}$.

36. Por los vértices de un cuadrado se trazan paralelas a las diagonales. Demostrar que los puntos de intersección de estas rectas son los vértices de un cuadrado cuyas diagonales se cortan en el punto de intersección de las diagonales del cuadrado dado.

37. Demostrar que en un polígono convexo, la suma de los ángulos exteriores tomados en un mismo sentido es 360^0

38. Demostrar que la base media de un trapecio (segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio) es paralela a la bases y su medida es la semisuma de las medidas de las bases.

39. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases y su medida es la semidiferencia de las medidas de las bases

40. En un trapecio isósceles (tiene los lados no paralelos congruentes), las diagonales son congruentes, los ángulos de la base mayor son congruentes, los ángulos de la base menor son congruentes. El punto de interseccón de las diagonales, los puntos medios de las bases y el punto de intersección de las rectas que contienen los lados no paralelos, están alineados. Las mediatrices de las bases coinciden.

41. A partir de dos vértices opuestos de un cuadrado, se toma sobre cada lado una longitud dada. La figura formada uniendo estos cuatro puntos de dos en dos es un rectángulo de perímetro constante.

42. Se da un triángulo ABC isósceles, de base $\overline{BC}$. Sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se toma D de forma que $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Se traza la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y se prolonga $\overleftrightarrow{AB}$ hasta E de forma que $BE = \frac{BC}{2}$. Si E, F, H son puntos

colineales tales que H es el punto medio $\overline{BC}$ y F pertenece a $\overline{AD}$. Demostrar:

i) $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$, ii) $\overline{EA} \cong \overline{HD}$, iii) $\overline{FA} \cong \overline{FD} \cong \overline{FH}$,
iv) Si $m(\widehat{BAC}) = 58^0$ calcular ángulo $\widehat{AFH}$ y $\widehat{ADB}$.

43. Mostrar que:
a) Dos paralelogramos son congruentes si tienen dos lados contiguos respectivamente congruentes e igual el ángulo que ellos forman.
b) Dos rectángulos son congruentes si tienen dos lados contiguos respectivamente congruentes.

44. En un paralelogramo $ABCD$, la bisectriz del ángulo $\widehat{A}$, corta a $\overline{DC}$ en M y la bisectriz del ángulo C, corta a $\overline{AB}$ en N.

    a) Mostrar que el cuadrilátero $AMCN$ es un paralelogramo.
    b)Mostrar que $\overline{DB}$ pasa por el punto medio O de $\overline{MN}$.
    c) Concluir que $BMDN$ es un paralelogramo.

45. Por el punto O donde se cortan las diagonales de un cuadrado, trazamos dos segmentos de recta $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$ perpendiculares entre ellos y limitados por los lados del cuadrado. Demostrar que $EHGF$ es un cuadrado.

46. En un paralelogramo $ABCD$ se une el vértice B con los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$. Probar que la diagonal $\overline{AC}$ queda dividida en tres segmentos congruentes.

47. En un paralelogramo $ABCD$, M es el punto medio $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{CD}$. Demostrar que $\overline{DM}$ y $\overline{BN}$ trisecan la diagonal $\overline{AC}$.

48. El $\triangle ABC$ esta inscrito en la circunferencia de centro O, $\overline{AD}$ es la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$ y H es el ortocentro. N, Q y P son los puntos medios de $\overline{AH}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demostrar que $OPNQ$ es un paralelogramo.

49. Sea un rombo $ABCD$. Se trazan $\overline{BM} \perp \overline{AD}$ y $\overline{DN} \perp \overline{BC}$. Demostrar que el cuadrilátero $BMDN$ es un rectángulo.

50. Sea un trapecio $ABCD$. Se prolongan los lados no paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ hasta cortarse en el punto E. Sean M, N, P, Q puntos medios de

$\overline{AE}, \overline{BE}, \overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Demostrar que $MNQP$ es un trapecio.

51. Sea $\overleftrightarrow{HH'} \parallel \overleftrightarrow{RR'}$, $A \in \overleftrightarrow{HH'}$, $B \in \overleftrightarrow{RR'}$, si $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz de $\widehat{HAB}$, $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz de $\widehat{H'AB}$, $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz de $\widehat{RBA}$ y $\overrightarrow{BC}$ es bisectriz de $\widehat{R'BA}$. Demostrar que $ACBD$ es un rectángulo.

52. En un trapecio cualquiera la diferencia de la base mayor menos la menor es menor que la suma de los otros dos lados del trapecio.

53. Demostrar que si un triángulo tiene dos medianas congruentes, entonces el triángulo es isósceles.

54. Sea ΔABC, rectángulo en A y sea $\overline{AH}$ altura. Desde H se trazan $\overline{HE}\perp\overline{AB}$ y $\overline{HD}\perp\overline{AC}$, demostrar que a)$\overline{DE} \cong \overline{AH}$, b) $\overline{AM}\perp\overline{DE}$, donde M es el punto medio de $\overline{BC}$.

55. En el $\triangle ABC$, N es punto medio de $\overline{BC}$ y $M \in \overline{AB}$ tal que $AM = \frac{1}{3}AB$, si $\{O\} \in \overline{AN} \cap \overline{CM}$ y $OM = 5x$, $ON = 2x - 1$, $OA = 3x - 11$. Hallar CM. (**Rta.:** $CM = 200$)

Construcciones con Regla y Compás.

56. Construir un cuadrado dada la suma de su diagonal y el lado.

57. Construir un trapecio conociendo las diagonales, un ángulo del trapecio y uno de los lados no paralelos adyacente al ángulo.

58. Trazar una paralela a la base BC de un triángulo ΔABC, que corte a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en D y E respectivamente, de manera que se tenga: $DE = CD + EB$.

59. Construir una triángulo rectángulo conociendo los puntos medios M y M' de los catetos y el punto H en que la recta que une estos puntos, encuentra la altura relativa a la hipotenusa.

60. Construir un rectángulo conociendo un lado y el ángulo entre las diagonales, opuesto al lado.

61. En el triángulo ΔABC, h_a es la altura desde el vértice A, m_a es la mediana desde el vértice A y v_a es la bisectriz desde el vértice A, a es la medida del lado $\overline{BC}$, b es la medida del lado $\overline{AC}$, c es la medida del lado $\overline{AB}$, α es la medida del ángulo en el vértice A, β es la medida del ángulo en el vértice B, γ es la medida del ángulo en el vértice C. Construir un triángulo ΔABC, dados:

(a) $a,\ \ h_b,\ \ v_c$.	(b) $a,\ \ h_b,\ \ m_c$.	(c)$a,\ \ \alpha,\ \ h_b$.
(d) $m_a,\ b,\ c$.	(e) $m_a,\ b,\ \alpha$.	(f) $h_a,\ m_a,\ \beta$.
(g) $a,\ b,\ b+c$.	(h) $a,\ b,\ b-c$.	(i)$a+b,\ b-c,\ c$.
(j) $a+b,\ c,\ \gamma$.	(k)$\beta,\ \gamma,\ p=a+b+c$.	(l) $a,\ \alpha,\ c-b$.
(m) $a,\ \alpha,\ b+c$.	(n) $a,\ \beta,\ c-b$	

CAPÍTULO 6

LA CIRCUNFERENCIA

6.1. DEFINICIONES PRELIMINARES

Definición 38 (**La circunferencia**). *Es el conjunto de puntos (o lugar geométrico de los puntos) del plano que equidistan de un punto fijo en el mismo plano, al punto fijo se le llama el centro de la circunferencia y a la distancia de cada punto al centro se le llama radio de la circunferencia.*

Notación: la circunferencia en el plano π y de centro en $O \in \pi$ y de radio r (ver Figura 1.), se denota por $C(O,r)$, en la notación de conjuntos es

$$C(O,r) = \{X \in \pi / OX = r,\ O, X \in \pi\}$$

Como sucedió con la recta en el plano, que dividió el plano en dos regiones disjuntas, lo mismo sucede con la circunferencia, la cual nos divide el plano en dos regiones, una de ellas la llamamos el interior y la otra el exterior de la circunferencia.

Definición 39 (**Interior de la Circunferencia**). *Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es menor que el radio, se le llama el interior de la circunferencia.*

Notación: el interior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\mathbf{IntC}(O,r)$, por lo tanto

$$\mathbf{IntC}(\mathbf{O},\mathbf{r}) = \{X \in \pi / OX < r,\ \ X, O \in \pi\}$$

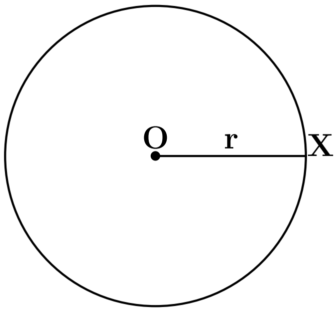


Figura 1.

Definición 40 (Exterior de la Circunferencia). *Al conjunto de puntos del plano de la circunferencia, tales que su distancia al centro es mayor que el radio, se le llama el exterior de la circunferencia.*

Notación: el exterior de la circunferencia de centro O y radio r se denota por $\mathbf{ExtC}(O,r)$, por lo tanto

$$\mathbf{ExtC}(\mathbf{O},\mathbf{r}) = \{X \in \pi / OX > r,\ \ X, O \in \pi\}$$

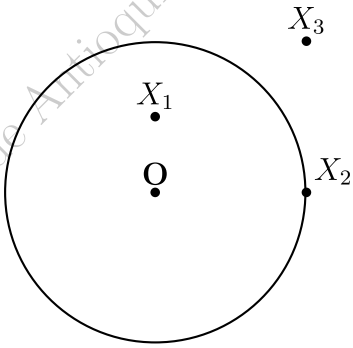


Figura 2.

En la Figura 2. los puntos X_1, X_2, X_3 están en el mismos plano de la $C(O,r)$.
Como $OX_1 < r$ entonces $X_1 \in \mathbf{IntC}(O,r)$.
Como $OX_3 > r$ entonces $X_1 \in \mathbf{ExtC}(O,r)$.
Como $OX_2 = r$ entonces $X_1 \in \mathbf{C}(O,r)$.

Definición 41 (**Círculo**). *La unión de la circunferencia y su interior la llamamos círculo.*

Notación: el círculo de centro O y radio r se denota por $\overline{\mathbf{C}}(O,r)$, por lo tanto

$$\overline{\mathbf{C}}(O,r) = \mathbf{C}(\mathbf{O},\mathbf{r}) \cup \mathbf{IntC}(\mathbf{O},\mathbf{r})$$

Definición 42 (**Cuerda**). *Es un segmento cuyos extremos son dos puntos diferentes de la circunferencia. Cuando el centro de la circunferencia es un punto interior de la cuerda, entonces a la cuerda la llamamos cuerda diametral y a su medida la llamamos diámetro.*

Por la definición de circunferencia, podemos concluir que el diámetro es dos veces el radio.
Ejercicio: demostrar que si $\overline{AB}$ es una cuerda entonces $Int\overline{AB} \subset IntC(O,r)$

Definición 43 (**Secante**). *La recta que intercepta la circunferencia en al menos dos puntos distintos se le llama secante.*

Más adelante veremos que si una recta intercepta una circunferencia, lo hace a lo sumo en dos puntos diferentes.

Definición 44 (**Tangente**). *Si una recta en el plano de la circunferencia la intercepta en un único punto, entonces decimos que la recta es tangente a la circunferencia; al punto de contacto entre la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.*

Nota: en tres dimensiones puede ocurrir que la recta intercepta la circunferencia en un único punto y la recta no ser tangente a la circunferencia.
En la Figura 3. se puede ver que:
l es tangente a la circunferencia $\mathbf{C}(O,r)$ en A.
La cuerda $\overline{BC}$ es diámetro.
La recta $\overleftrightarrow{DE}$ es secante al circunferencia.

Definición 45 (**Arco**). *Dados dos puntos distintos de una circunferencia entonces la circunferencia queda dividida en dos conjuntos a los cuales llamaremos arcos.*

Notación: si los puntos son A y B (ver Figura 4.), los arcos son arco AMB y arco ANB, los cuales denotamos por $\overset{\frown}{AMB}$ y $\overset{\frown}{ANB}$ y como la cuerda $\overline{AB}$ esta asociada a cada uno de éstos arcos entonces decimos que

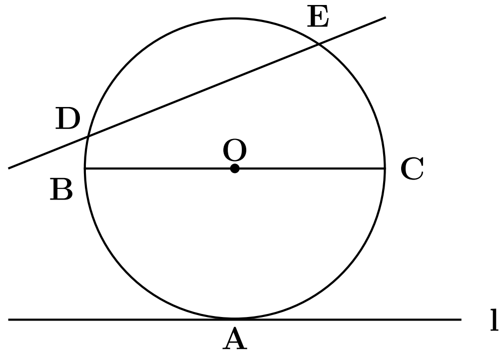


Figura 3.

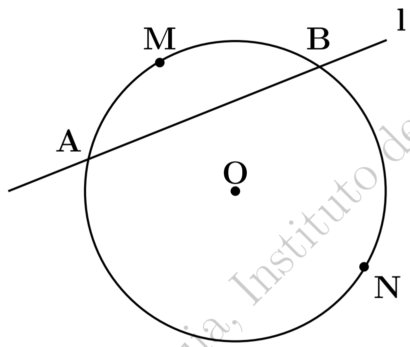


Figura 4.

el arco $A\overset{\frown}{M}B$ (o el arco $A\overset{\frown}{N}B$) está sub-tendido por la cuerda $\overline{AB}$ o que la cuerda $\overline{AB}$ sub-tiende al arco $A\overset{\frown}{M}B$ (o al arco $A\overset{\frown}{N}B$).
A los puntos A, B se les llama los extremos del arco.
Si al arco le quitamos los extremos, a este nuevo conjunto lo llamamos el Interior del arco y lo denotamos por $Int(A\overset{\frown}{M}B)$

Definición 46.
a.) **Arco Principal**: *si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en semiplanos opuestos con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco principal*
b.) **Arco no Principal**: *si el centro de la circunferencia y el Interior del arco están en el mismo semiplano con respecto a la recta que pasa por los extremos del arco, a éste arco lo llamamos arco no principal.*
c.) *Si la recta que pasa por los extremos del arco, también pasa por el centro*

de la circunferencia entonces decimos que los dos arcos que se forman son arcos principales (las semicircunferencias son arcos principales).

En la Figura 4. la recta l que pasa por A y B divide la circunferencia en dos arcos, el $A\overset{\frown}{M}B$ que es arco principal y el $A\overset{\frown}{N}B$ que es arco no principal.
Nota: obsérvese que para cada arco principal corresponde uno y solo un arco no principal y recíprocamente, también obsérvese que la unión del arco principal y el no principal es la circunferencia.

Definición 47 (Ángulo Central o ángulo al centro). *Es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y es coplanar con la circunferencia.*

En la Figura 5. el ángulo $\widehat{AOB}$ es un ángulo al centro; en este caso decimos que $\widehat{AOB}$ intercepta al arco principal $\overset{\frown}{AB}$ y el arco principal $\overset{\frown}{AB}$ sub-tiende al ángulo $\widehat{AOB}$.
Obsérvese que al arco no principal $A\overset{\frown}{M}B$ no se le asocia ángulo central, ya que los ángulos están definidos entre 0^0 y 180^0.

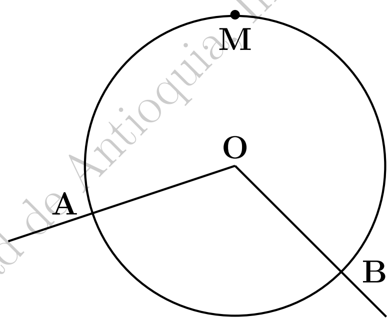


Figura 5.

6.2. TEOREMAS BÁSICOS

Teorema 65 (Existencia y unicidad de la circunferencia).

Por tres puntos distintos, no colineales pasa una y solo una circunferencia.

Demostración.
Existencia. Sean A, B, C tres puntos distintos y no colineales (ver Figura 6.); sean m y m' las mediatrices de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y

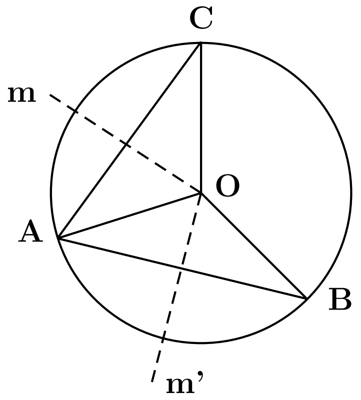


Figura 6.

por el **Corolario** 13. existe un único punto $\{O\} = m \cap m'$. Por las propiedades de la mediatriz se tiene que, como $O \in m$ entonces $OA = OC$ y similarmente, como $O \in m'$ entonces $OA = OB$, por lo tanto

$$OA = OB = OC$$

luego, O es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos A, B, C, llamémosla $C(O, r)$.
Unicidad. Supongamos que por los puntos A, B, C pasa otra circunferencia $C(O', r')$; como $O'A = O'B$ entonces por las propiedades de la mediatriz $O' \in m'$ y como $O'A = O'C$ entonces $O' \in m$, luego $\{O'\} = m \cap m'$ y como $\{O\} = m \cap m'$ entonces por el **Teorema 1.** $O' \equiv O$ y por tanto $r' = r$. De esta manera hemos concluido que

$$C(O, r) \equiv C(O', r') \qquad \blacksquare$$

Construcción básica: por tres puntos dados, distintos y no colineales trazar con regla y compás, una circunferencia.
Construcción. (Ver Figura 7.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Trazo mediatriz l de $\overline{AB}$.
- Trazo mediatriz m de $\overline{AC}$, la cual corta a l en O.
- Con centro en O y radio OA trazo circunferencia, esta es la circunferencia pedida.

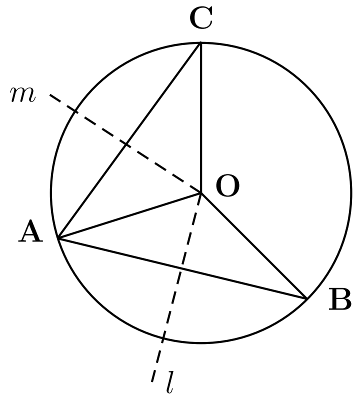


Figura 7.

Justificación. Como O pertenece a las mediatrices l y m, entonces

$$OA = OB = OC$$

Teorema 66.

Si una recta y una circunferencia son coplanares, la recta intercepta a la circunferencia a lo sumo en dos puntos.

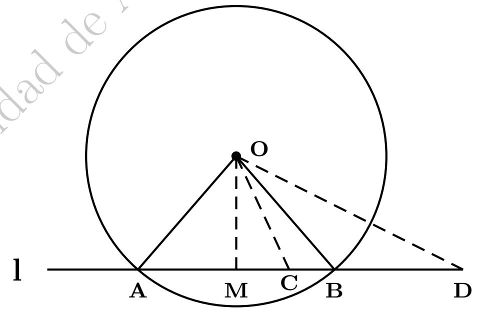


Figura 8.

Demostración. Sean l la recta y $C(O, r)$ la circunferencia; veamos que existen a lo sumo dos puntos distintos A y B tales que $\{A, B\} = C(O, r) \cap l$ (ver Figura 8.).

Neguemos la tésis, supongamos que existen tres puntos distintos que pertenecen a $C(O, r) \cap l$, con el tercer punto pueden suceder dos casos: a.) que esté en el $Int\overline{AB}$, b.) que esté en el $Ext\overline{AB}$.

Caso a.) sea $C \in Int\overline{AB}$ y sea $\overline{OM} \perp l$, como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ entonces $\overleftrightarrow{OM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y por tanto $A - M - B$. Con el punto C pueden suceder tres casos: 1.) $M - C - B$, 2.) $C \equiv M$, 3.) $A - C - M$.
caso 1.) Si $M - C - B$ entonces $\overline{MC} < \overline{MB}$ y por el teorema de las oblicuas, $\overline{OC} < \overline{OB}$ y como OB es radio, entonces $OC < r$, luego $C \in IntC(O, r)$. Absurdo!
caso 2.) Si $C \equiv M$ entonces por el teorema de las oblicuas, $\overline{OM} < \overline{OB}$, luego $OM = OC < r$, es decir, $C \in IntC(O, r)$. Absurdo!
caso 3.) Se hace en forma similar al caso 1.)

Caso b.) Sea $D \in Ext\overline{AB}$, por lo tanto, $\overline{MB} < \overline{MD}$ y por el teorema de las oblicuas $\overline{OB} < \overline{OD}$y por tanto $r < OD$, es decir que, $D \in ExtC(O, r)$. Absurdo!
Afirmo tésis: existen a los sumo dos puntos distintos A, B tales que

$$\{A, B\} = C(O, r) \cap l. \qquad \blacksquare$$

Nota: de acuerdo al teorema anterior, entre una recta y una circunferencia coplanares, pueden dársen tres posibilidades (ver Figura 9.).

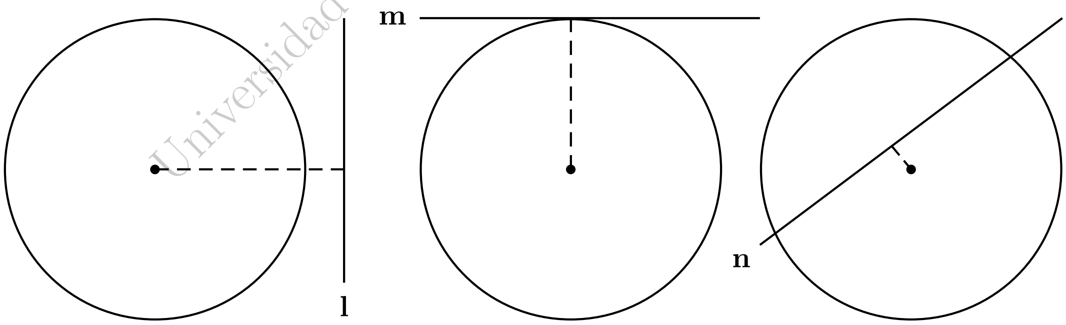


Figura 9.

1. Que la recta sea exterior a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es mayor que el radio.

2. Que la recta sea tangente a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es igual al radio.
3. Que la recta sea secante a la circunferencia; en éste caso la distancia del centro a la recta es menor que el radio.

Teorema 67 (Propiedad de la tangente).

Toda recta coplanar con una circunferencia y tangente a ella es perpendicular al radio trazado al punto de tangencia.

Demostración. (Ver la Figura 10.)

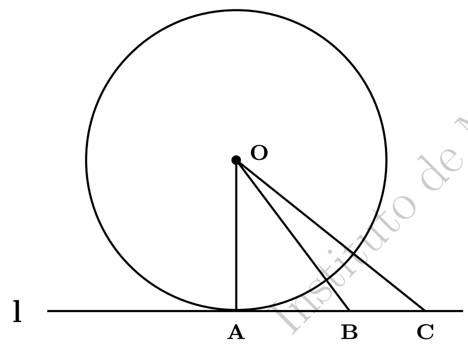


Figura 10.

Sea l tangente a la $C(O, r)$ en A. Veamos que $\overline{OA} \perp l$. Neguemos esta tésis: supongamos que $\overline{OA}$ no es perpendicular a l, entonces por el teorema de la perpendicular por un punto exterior a una recta, existe una recta m que pasa por O tal que $m \perp l$, sea $\{B\} = l \cap m$.
Por el Axioma de construcción segmento existe un punto C tal que $A-B-C$ y $\overline{BC} \cong \overline{AB}$.
En el $\triangle OAC$ se tiene que $\overline{OB}$ es altura y también es mediana y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, concluimos que el $\triangle OAC$ es isósceles y por tanto $\overline{OA} \cong \overline{OC}$, luego $C \in C(O, r)$ y como A es distinto de C, ya que $A - B - C$, entonces l es secante a la circunferencia. Absurdo!
Afirmo tésis: $\overline{OA} \perp l$. ■

Teorema 68 (Recíproco del anterior).

Si una recta coplanar con una circunferencia es perpendicular a un radio, en el extremo del radio distinto del centro, entonces la recta es tangente a la circunferencia en dicho extremo.

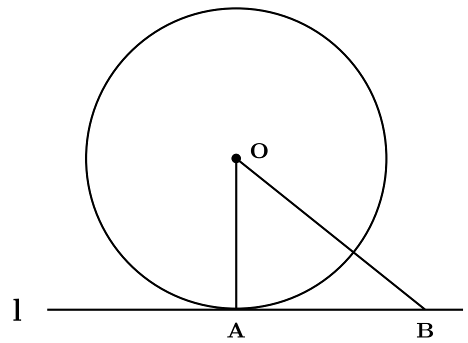


Figura 11.

Demostración. (Ver la Figura 11.) Sea $\overline{OA}$ radio y $A \in l$ y $\overline{OA} \perp l$. Veamos que l es tangente a la circunferencia en A, para ello veamos que todo punto $B \in l$ y B distinto de A es exterior a la circunferencia.
En efecto, como $\overline{OB}$ es una oblicua con respecto a O entonces por el teorema de las oblicuas, $\overline{OA} < \overline{OB}$, es decir $r < OB$ y por tanto, para todo punto B distinto de A, se cumple que $B \in ExtC(O, r)$, de aquí que l es tangente a la circunferencia en A. ■

Construcción básica: por un punto A dado en una circunferencia, trazar una recta tangente a la circunferencia.

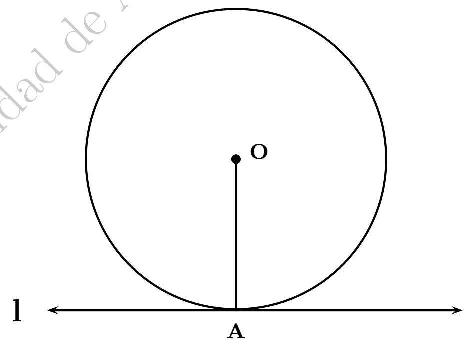


Figura 12.

Construcción. (Ver Figura 12.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno O con A .

- Por A trazo $l \perp \overline{OA}$, entonces l es tangente a la circunferencia por A.

Justificación. Como $\overline{OA} \perp l$ y $\overline{OA}$ es radio, entonces l es tangente a la circunferencia.

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 69.

a.) La mediatriz de toda cuerda, pasa por el centro.
b.) La recta que pasa por el centro y es perpendicular a una cuerda, es mediatriz de la cuerda.

Teorema 70.

Si dos circunferencias distintas y coplanares se interceptan entonces su intersección tiene a los sumo dos puntos distintos.

Demostración. Sean $C(O,r)$ y $C(O',r')$ dos circunferencias distintas. Veamos que

$$C(O,r) \cap C(O',r')$$

tiene a lo sumo dos puntos distintos.
Neguemos lo anterior, es decir, supongamos que

$$C(O,r) \cap C(O',r') = \{A, B, C\},$$

donde A, B, C son tres puntos distintos.
Con los puntos A, B, C pueden suceder dos casos:
a.) Los puntos A, B, C son colineales, por tanto la recta que pasa por A, B, C intercepta las circunferencias en tres puntos distintos. Absurdo! (contradice el Teorema 66.)
b.) Los puntos A, B, C no son colineales y como son distintos, entonces por el Teorema 65., por A, B, C pasa una única circunferencia, pero

$$C(O,r) \cap C(O',r') = \{A, B, C\},$$

entonces, nuevamente por el Teorema 65., $C(O,r) \equiv C(O',r')$. Absurdo! ■

Definición 48. *Decimos que dos puntos son simétricos con respecto a una recta, si la recta es mediatriz del segmento que une los dos puntos.*

En la Figura 13. los puntos A, B son simétricos con respecto a la recta l, o también el punto B es simétrico de A con respecto a la recta l

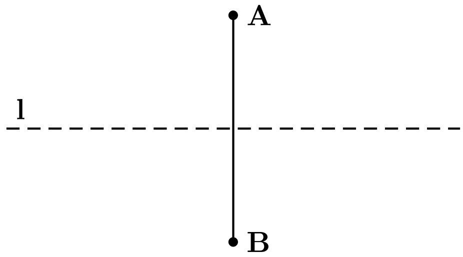


Figura 13.

Teorema 71.

a.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan en un punto que no pertenece a la recta que pasa por los centros, entonces el simétrico de este punto con respecto a ésta recta también pertenece a las dos circunferencias.
b.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan, entonces la distancia entre los centros es mayor que la diferencia entre los radios y menor que su suma.
c.) Si dos circunferencias coplanares y distintas se cortan, la recta que pasa por los centros es mediatriz de la cuerda común.
d.) Si dos circunferencias coplanares son tangentes, entonces el punto de tangencia esta sobre la recta de los centros.
e.) Si dos circunferencias coplanares son tangentes entonces la recta perpendicular a la recta que pasa por los centros en el punto de tangencia, es tangente a ambas circunferencias (se le llama la tangentes común).

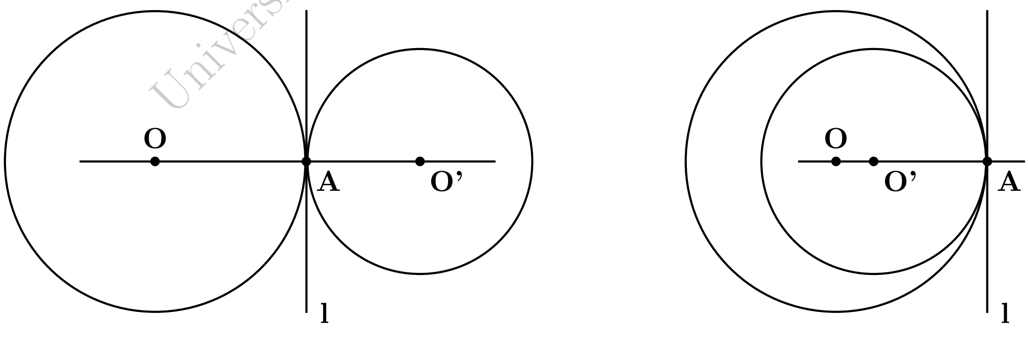


Figura 14.

Demostración. d.) (Ver Figura 14.) Si el punto de tangencia no está sobre la recta que pasa por los centros, entonces por la parte a.) su simétrico con respecto a la recta que pasa por los centros, está sobre la circunferencia y por tanto las dos circunferencias son secantes. Absurdo!
e.) este resultado es consecuencia de la parte d.) y del teorema 68. ■

6.3. POSICIONES ENTRE DOS CIRCUNFERENCIAS

Por el Teorema 70., entre dos circunferencias coplanares se presentan las siguientes situaciones:

1.) **Exteriores.**(ver Figura 15.) Cuando su intersección es vacía y el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancia entre los

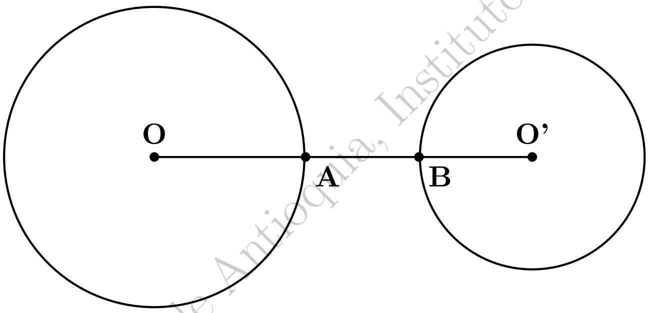


Figura 15.

centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son exteriores si y solo si

$$d = OA + AB + BO' = r + AB + r' > r + r'$$

2.) **Tangentes.**(ver Figura 14.) Cuando su intersección es un único punto. Se presentan dos casos:
a.) **Tangentes exteriormente:** cuando el interior de una de ellas esta en el exterior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son tangentes exteriormente si y solo si

$$d = OA + BO = r + r'$$

b.) **Tangentes interiormente:** cuando el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son tangentes interiormente si y solo si

$$d = OA - BO = r - r'$$

3.) **Secantes:** (ver Figura 16.) cuando se intersectan en dos puntos distintos. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces (por el Teorema de la desigualdad triángular y su corolario) las circunferencias son secantes si y solo si

$$r - r' < d < r + r'$$

obsérvese que cuando dos circunferencias son secantes el $Int A\widehat{M}B$ esta en el $ExtC(O, r)$ y el $Int A\widehat{N}B$ esta en el $IntC(O, r)$ y también, $Int A\widehat{L}B$ esta en el $ExtC(O', r')$ y el $Int A\widehat{R}B$ esta en el $IntC(O', r')$

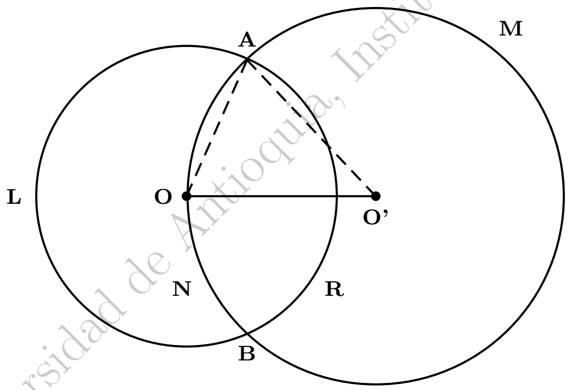


Figura 16.

4.) **Interiores:** (ver Figura 17.) cuando su intersección es vacía y el interior de una de ellas esta en el interior de la otra. Si la distancia entre los centros la llamamos $d = OO'$, entonces las circunferencias son interiores si y solo si

$$d = OA - AB - BO' < r - r'$$

5.)**Concéntricas:** dos circunferencias son concéntricas, cuando sus centros coinciden, es decir, si y solo si $d = OO' = 0$

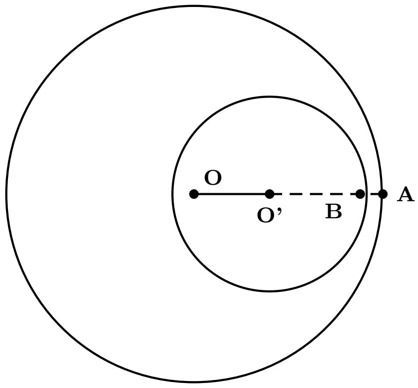


Figura 17.

Teorema 72 (De las tangentes por punto exterior).

En un mismo plano, por un punto exterior a una circunferencia existen dos rectas tangentes y solo dos.
Los segmentos entre el punto exterior y los puntos de tangencia son congruentes. La semirrecta con origen en el punto exterior y que pasa por el centro es bisectriz del ángulo entre las tangentes.

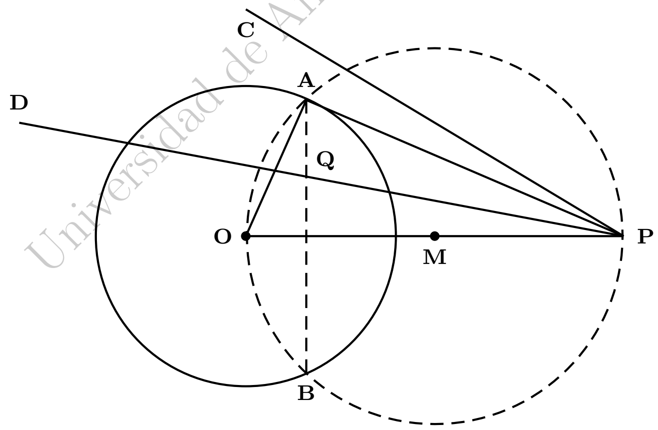


Figura 18.

Demostración. (Ver Figura 18.) (Existencia de dos rectas tangentes). Sea M el punto medio de $\overline{OP}$ y sea la $C(O, MO)$, luego existen dos puntos y solo dos A, B tales que $\{A, B\} = C(O, r) \cap C(M, MO)$; por tanto

$$\overline{MO} \cong \overline{MP} \cong \overline{MA}$$

y por el Teorema 47, el $\triangle APO$ es rectángulo en A, es decir, $\overline{OA} \perp \overline{AP}$ y por el Teorema 68 $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la $C(O, r)$ en A. Similarmente se demuestra que $\overleftrightarrow{BP}$ es tangente a la $C(O, r)$ en B.
En los triángulos rectángulos $\triangle OAP$ y $\triangle OBP$ se tiene que:

$$\overline{OP} \cong \overline{OP}, \qquad \overline{OA} \cong \overline{OB}$$

entonces por el criterio H-C, $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ y por tanto

$$\overline{AP} \cong \overline{BP}, \qquad \widehat{APO} \cong \widehat{BPO}$$

(Existen exactamente dos tangentes) Supongamos que existen tres rectas tangentes distintas: $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BP}$ y otra ; con esta otra, pueden suceder dos casos: a.) que esté en el $Int\widehat{APB}$ y sea tangente en D, b.) que esté en el $Ext\widehat{APB}$ y sea tangente en C.
a.) Sea $\overrightarrow{PD} \subset Int\widehat{APB}$, entonces por el teorema de la barra trasversal, existe un punto $\{Q\} = \overline{AB} \cap \overrightarrow{PD}$, por lo tanto $Q \in \overline{AB}$, lo cual implica que $Q \in IntC(O, r)$, Absurdo! porque la recta $\overleftrightarrow{DP}$ es tangente en D a la circunferencia.
b.) Sea $\overrightarrow{PC} \subset Ext\widehat{APB}$, entonces pueden suceder dos casos: 1). que $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{PA}$ están en el mismo semiplano de borde $\overleftrightarrow{OP}$ o 2). que $\overrightarrow{PC}$ y $\overrightarrow{PB}$ están en el mismo semiplano de borde $\overleftrightarrow{OP}$.
En cualquiera de éstos dos casos, se tiene, por lo que demostramos en la parte de existencia que $\widehat{OPA} \cong \widehat{OPC}$ (o $\widehat{OPB} \cong \widehat{OPC}$) y por el axioma de construcción de ángulo se tiene que $\overrightarrow{PA} \equiv \overrightarrow{PC}$ (o $\overrightarrow{PB} \equiv \overrightarrow{PC}$) lo cual es Absurdo! porque tomamos tres rectas tangentes distintas. ■

Construcción básica: por un punto P dado, exterior a una circunferencia, trazar las rectas tangentes a una circunferencia dada.
Construcción. (Ver Figura 19.) Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno O con P .

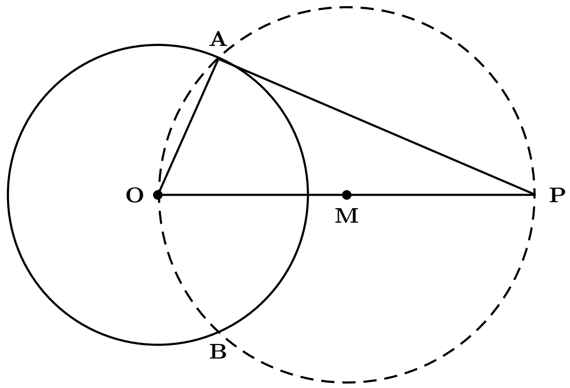


Figura 19.

- Hallo M punto medio de $\overline{OP}$.
- Trazo circunferencia de centro M y radio MO (o MP), la cual corta la circunferencia dada en A y B.
- Uno A con P y B con P, las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{BP}$ son tangentes a la circunferencia dada.

Justificación. Como $\overline{OP}$ es diámetro entonces el $\triangle AOP$ es rectángulo en A y por lo tanto $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$ y como OA es radio, entonces $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la circunferencia en A. Similarmente se demuestra que $\overleftrightarrow{BP}$ es tangente a la circunferencia.

El siguiente Teorema es similar al Teorema de las oblicuas, solo que en éste caso cambiamos la recta l por una circunferencia.

Teorema 73 (Teorema de las oblicuas para la circunferencia).

La distancia más corta de un punto distinto del centro a una circunferencia, es la parte del radio o su prolongación, comprendida entre el punto y la circunferencia.

Demostración. (Ver Figura 20.) Sea $P \notin C(O,r)$, $P \neq O$, con el punto P pueden suceder dos casos: a.) $P \in IntC(O,r)$, b.) $P \in Ext(O,r)$.

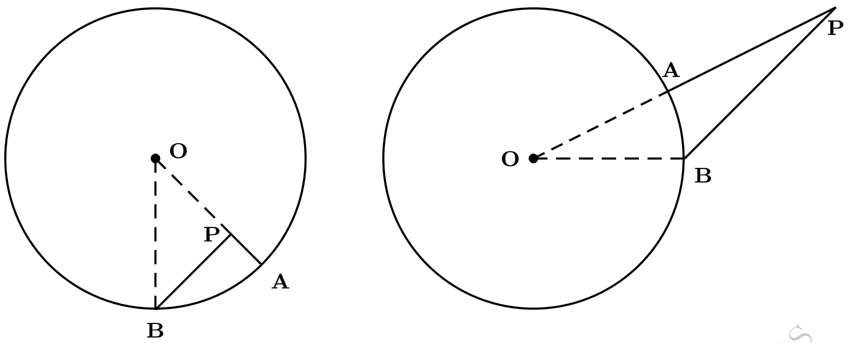


Figura 20.

a.) Si $P \in IntC(O,r)$; sea $\overline{OA}$ el radio que contiene al punto P y sea B un punto distinto de A tal que $B \in C(O,r)$, veamos que $\overline{PA} < \overline{PB}$.
Con el punto B pueden suceder dos casos: a) $B - O - P$, b) B, O, P son no colineales. Caso a): se deja como ejercicio. Caso b): por el teorema de la desigualdad triángular en el $\triangle OPB$ se tiene que

$$OB < OP + PB,$$

pero $OB = OA = OP + PA$, por lo tanto $OP + PA < OP + PB$, es decir, $PA < PB$ o sea que

$$\overline{PA} < \overline{PB}$$

b.) Si $P \in Ext(O,r)$, sea $\overline{OA}$ el radio tal que su prolongación contiene al punto P, es decir que $P \in \overrightarrow{OA}$ y sea B un punto distinto de A tal que $B \in C(O,r)$, veamos que $\overline{PA} < \overline{PB}$.
Con el punto B pueden suceder dos casos: a) $B - O - P$, b) B, O, P son no colineales. Caso a): se deja como ejercicio. Caso b): en efecto, por el teorema de la desigualdad triángular en el $\triangle OPB$ se tiene que

$$OP < OB + BP,$$

pero $OP = OA + AP$, por lo tanto $OA + AP < OB + BP$, es decir, $PA < PB$ o sea que

$$\overline{PA} < \overline{PB} \qquad \blacksquare$$

6.4. RELACIONES ENTRE ARCOS Y CUERDAS

De acuerdo a las definiciones de arco principal, cuerda y ángulo central en una circunferencia, podemos afirmar que existe una correspondencia biunívoca entre ellas, es decir, a cada arco principal corresponde uno y solo un ángulo central y una y solamente una cuerda.

Definición 49. *a.)* **Circunferencias congruentes.** *Decimos que dos circunferencias son congruentes sii tienen el mismo radio y lo denotamos así:*

$$C(O,r) \cong C(O',r)$$

*b.)***Arcos principales congruentes.** *Decimos que dos arcos principales en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus ángulos centrales son congruentes.*

*c.)***Arcos no principales congruentes.** *Decimos que dos arcos no principales en una misma circunferencia o en circunferencias congruentes, son congruentes si sus respectivos arcos principales asociados son congruentes.*

d.) Decimos que dos arcos son adyacentes, si el único punto en común es uno de sus extremos.

6.4.1. MEDIDA DE ARCOS

La unidad de medida para arcos, es el arco sub-tendido por un ángulo central de un grado, a esta unidad de medida para arcos también la llamaremos grado.
Si por el centro de una circunferencia trazamos dos rectas perpendiculares, entonces se forman cuatro ángulos al centro congruentes y por lo tanto interceptan la circunferencia, formando cuatro arcos principales congruentes y en consecuencia su medida será $90^{\underline{o}}$
Por lo anterior podemos concluir que la medida de la semicircunferencia es $180^{\underline{o}}$ y la medida de la circunferencia es $360^{\underline{o}}$.

Nota: no se debe confundir el concepto de medida de arco con el de longitud de arco, el primero tiene por unidad de medida el grado y el segundo tiene por unidad de medida la unidad de longitud (metros o centímetros o pulgadas, etc.).

Definición 50. *La medida en grados de un arco $\overset{\frown}{ACB}$ denotada por $m(\overset{\frown}{ACB})^{\underline{o}}$ se define así(ver Figura 21.):*

1. *Si $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco principal sub-tendido por el ángulo central $\widehat{AOB}$, entonces $m(\overset{\frown}{ACB})^{\underline{o}}$ es numéricamente igual a la medida del ángulo central $\widehat{AOB}$. Es decir:*

$$m(\overset{\frown}{ACB})^{\underline{o}} = m(\widehat{AOB})$$

2. *Si $\overset{\frown}{ADB}$ es el arco no principal determinado por A y B entonces*

$$m(\overset{\frown}{ADB})^{\underline{o}} = 360^{\underline{o}} - m(\overset{\frown}{ACB})^{\underline{o}},$$

donde $\overset{\frown}{ACB}$ es el arco principal.

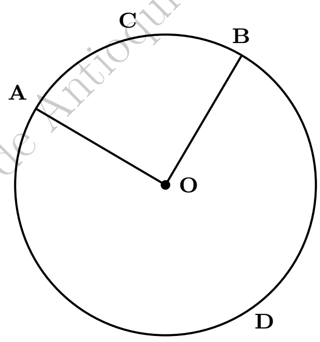


Figura 21.

Postulado de adición para arcos adyacentes:

$$\overset{\frown}{AMB} \cup \overset{\frown}{BNC} = \overset{\frown}{ABC}$$

y

$$m(\overset{\frown}{AMB}) + m(\overset{\frown}{BNC}) = m(\overset{\frown}{ABC})$$

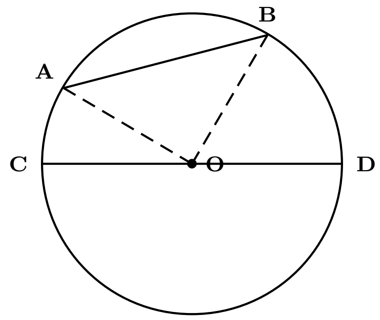


Figura 22.

Teorema 74.

En una misma circunferencia el diámetro es la mayor de las cuerdas.

Demostración. (Ver Figura 22.) Sea $\overline{AB}$ una cuerda que no contiene al centro O y sea $\overline{CD}$ un diámetro. Por el teorema de la desigualdad triangular en el $\triangle OAB$ se tiene que $AB < OA + OB$, pero como $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ son radios, entonces $OA + OB = OC + OD = CD$, por tanto $AB < CD$, es decir,

$$\overline{AB} < \overline{CD} \quad \blacksquare$$

Teorema 75.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. *Cuerdas congruentes equidistan del centro.*
2. *Dadas dos cuerdas, la mayor dista menos del centro.*

Demostración. (Ver Figura 23.) La parte 1.) se deja como ejercicio.
2.) Sea la $C(O, r)$ y sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas tales que $\overline{AB} < \overline{CD}$ entonces por la definición de $<$ existe un punto $E \in Int(\overline{CD})$ tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.
Como E es punto interior de la circunferencia, entonces $\overline{OE} < \overline{OB}$; en los $\triangle OAB$ y $\triangle OCE$ se tiene:

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \qquad \overline{AB} \cong \overline{CE}, \qquad \overline{OB} > \overline{OE}$$

luego $\widehat{OAB} > \widehat{OCE}$.
Sea F el pie del segmento perpendicular desde O a $\overline{AB}$ y sea G el pie del

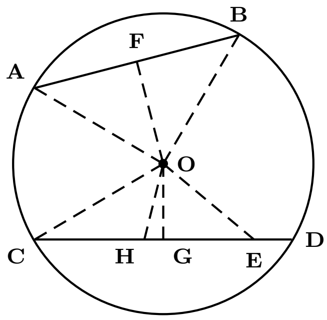


Figura 23.

segmento perpendicular desde O a $\overline{CD}$ y por tanto F, G son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente y sea H el punto medio de $\overline{CE}$.
En los $\triangle OAF$ y $\triangle OCH$ se tiene:

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \qquad \overline{AF} \cong \overline{CH}, \qquad \widehat{OAF} > \widehat{OCH}$$

luego $\overline{OF} > \overline{OH}$; por el teorema de las oblicuas $\overline{OH} > \overline{OG}$ y por transitividad $\overline{OF} > \overline{OG}$. ∎

A continuación se enuncia el recíproco del anterior teorema, se deja como ejercicio.

Teorema 76.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. *Cuerdas equidistantes del centro son congruentes.*
2. *Dadas dos cuerdas, la que dista menos del centro es mayor.*

Teorema 77.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. *Dos ángulos al centro son congruentes si y solo si sub-tienden arcos principales congruentes.*
2. *Si los ángulos al centro no son congruentes, el arco principal subtendido por el ángulo al centro mayor, es mayor. Recíprocamente, si el arco principal es mayor entonces el ángulo al centro es mayor.*

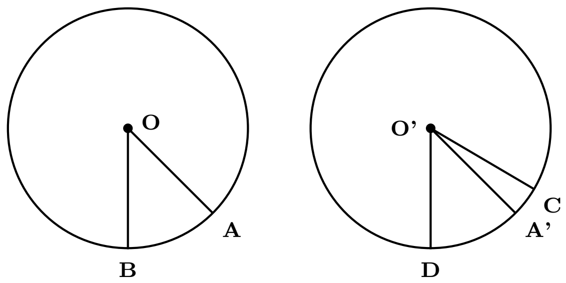


Figura 24.

Demostración. (Ver Figura 24.) La parte 1. se deja como ejercicio.
2. Supongamos que $\widehat{AOB} < \widehat{CO'D}$, entonces por la definición de $<$, existe una semirrecta $\overrightarrow{O'A'} \subset Int\widehat{CO'D}$, con $A' \in C(O', r)$ tal que $\widehat{A'O'D} \cong \widehat{AOB}$, luego por 1. $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A'D}$ y por tanto $A' \in Int\overset{\frown}{CD}$. Luego $\overset{\frown}{A'D} < \overset{\frown}{CD}$ y por tanto $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{CD}$. ■

El recíproco se deja como ejercicio.

Teorema 78.

En una misma circunferencia o en circunferencias congruentes:

1. *Dos cuerdas son congruentes si y solo si sub-tienden arcos principales congruentes.*

2. *Si las cuerdas no son congruentes, la mayor de las cuerdas sub-tiende el mayor arco principal. Recíprocamente, el mayor arco principal sub-tiende mayor cuerda.*

Demostración. (Ver Figura 25.) La parte 1. se deja como ejercicio.
2. Supongamos que $\overline{AB} > \overline{CD}$; en los $\triangle AOB$ y $\triangle COD$ se tiene que

$$\overline{OA} \cong \overline{OC}, \qquad \overline{OB} \cong \overline{OD}, \quad \overline{AB} > \overline{CD}$$

entonces, por el criterio L-L-L en desigualdades, $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$
y por el teorema anterior, $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$, entendiéndose que son los arcos principales. ■

El recíproco se deja como ejercicio.

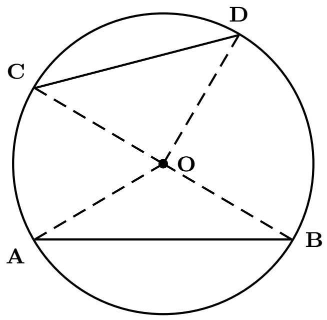


Figura 25.

Teorema 79.

Todo radio perpendicular a una cuerda, biseca la cuerda y biseca al arco principal sub-tendido por la cuerda. Recíprocamente, todo radio que biseca una cuerda o al arco principal sub-tendido, es perpendicular a la cuerda.

Demostración. (Ver Figura 26.)

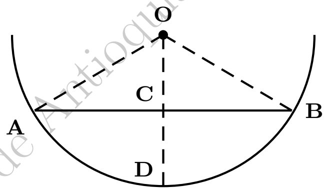


Figura 26.

Sea $\overline{AB}$ una cuerda y $\overline{OD}$ un radio perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$ en C. Como $\overline{OA} \cong \overline{OB}$, entonces el $\triangle OAB$ es isósceles; como $\overline{OC}$ es altura en dicho triángulo, entonces por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, $\overline{OC}$ es bisectriz y mediana en éste triángulo, luego C es punto medio de $\overline{AB}$ y $\widehat{AOD} \cong \widehat{DOB}$ y ambos son ángulos al centro, por tanto $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}$. ■

Teorema 80 (Arcos entre paralelas).

Los arcos principales de una misma circunferencia, comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes.

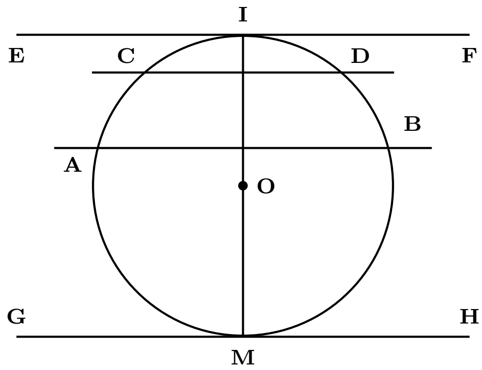


Figura 27.

Demostración. (Ver Figura 27.) Pueden suceder los siguientes casos: 1. que las dos rectas sean secantes. 2. que una recta sea secante y la otra sea tangente. 3. que las dos rectas sean tangentes.

1. Para este caso, supongamos que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son secantes y paralelas; sean $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BD}$ los arcos principales comprendidos entre éstas rectas. Sea $\overline{OI}$ un radio perpendicular a la cuerda $\overline{AB}$ y por tanto $\overline{OI}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{CD}$, ya que $\overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{CD}$ y por teorema anterior, I es punto medio del arco $\overset{\frown}{AIB}$ y del arco $\overset{\frown}{CID}$, luego

$$m(\overset{\frown}{AI}) = m(\overset{\frown}{IB}), \qquad m(\overset{\frown}{CI}) = m(\overset{\frown}{ID})$$

restando $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{BD})$, o sea que $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$.

2. Para este caso, supongamos que $\overleftrightarrow{CD}$ es secante y $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente en I a la circunferencia, por lo tanto el radio $\overline{OI}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{EF}$ y como $\overleftrightarrow{CD} \,||\, \overleftrightarrow{EF}$ entonces $\overline{OI} \perp \overline{CD}$ y por tanto $\overset{\frown}{CI} \cong \overset{\frown}{ID}$.

3. Para este caso, supongamos que $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente en I a la circunferencia y $\overleftrightarrow{GH}$ es tangente en M a la circunferencia, luego $\overline{OI} \perp \overleftrightarrow{EF}$ y $\overline{OM} \perp \overleftrightarrow{GH}$ como $\overleftrightarrow{EF} \| \overleftrightarrow{GH}$ entonces $\overleftrightarrow{OI} \perp \overleftrightarrow{GH}$ y por el Teorema de la unicidad de la perpendicular por un punto exterior a una recta, $\overleftrightarrow{OI} \equiv \overleftrightarrow{OM}$, luego I, O, M son colineales y por lo tanto $\overline{IM}$ es diámetro, esto demuestra que

$$\overset{\frown}{IAM} \cong \overset{\frown}{IBM}.$$

Veamos que los arcos entre rectas paralelas son principales, en efecto, Como $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente a la circunferencia en I y $\overleftrightarrow{GH}$ es tangente a la circunferencia en M y $\overleftrightarrow{EF} \| \overleftrightarrow{GH}$, por lo tanto, $\overline{IM}$ es diámetro o sea que los arcos $\overset{\frown}{IBM}$ y $\overset{\frown}{IAM}$ son arcos principales, por lo tanto, cualquier arco comprendido entre estos dos arcos, son arcos principales y de aquí que $\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{DB}, \overset{\frown}{IC}, \overset{\frown}{ID}$ etc. son arcos principales. ■

Nota: se deja como ejercicio, mostrar que el recíproco también es cierto.

6.5. ÁNGULO INSCRITO Y ARCO CAPÁZ

Definición 51 (Ángulo Inscrito en un arco). *Decimos que un ángulo esta inscrito en un arco si:*
1. cada extremo del arco esta respectivamente sobre cada lado del ángulo.
2. el vértice del ángulo es un punto del arco distinto de los extremos del arco.

Definición 52 (Arco capáz). *El arco que acompaña el ángulo inscrito, en la definición anterior, se le llama arco capáz.*

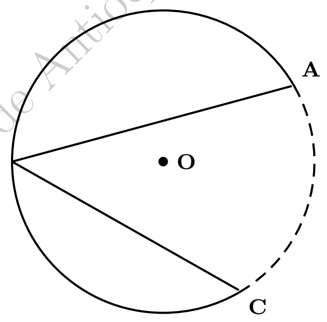


Figura 28.

En la Figura 28. el $\widehat{ABC}$ esta inscrito en el arco capáz $\overset{\frown}{ABC}$

Teorema 81 (Teorema del ángulo inscrito).

La medida de un ángulo inscrito en un arco es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.

Demostración. Pueden suceder tres casos, según la posición del centro: 1. El centro esta sobre uno de los lados del ángulo. 2. El centro esta en el interior del ángulo. 3. El centro esta en el exterior del ángulo.

1. El centro esta sobre uno de los lados del ángulo (Ver Figura 29.). Sea $\widehat{ABC}$ inscrito en la $C(O,r)$ y $O \in \overrightarrow{BC}$. Veamos que $m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}m(AC)^{\underline{o}}$
Tracemos el radio $\overline{OA}$, por tanto el $\triangle AOB$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles, $\widehat{ABO} \cong \widehat{BAO}$ y como $\widehat{AOC}$ es ángulo exterior, entonces

$$\gamma = \alpha + \beta = 2\beta$$

y siendo $\widehat{AOC}$ un ángulo al centro cuya medida es γ entonces la medida del arco $m(\overset{\frown}{AC})^{\underline{o}} = m(\widehat{AOC})^{\underline{o}} = \gamma$
luego

$$m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AC})^{\underline{o}}$$

2. Cuando $O \in Int(\widehat{ABC})$ (Ver Figura 30.).
Como $O \in Int(\widehat{ABC})$ entonces la semirrecta $\overrightarrow{BO} \subset Int(\widehat{ABC})$ y por tanto

$$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABO}) + m(\widehat{OBC}) = \beta + \gamma$$

sea $D \in \overrightarrow{BO} \cap C(O,r)$, por la parte 1. de este teorema, $m(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AD})$ y $m(\widehat{DBC}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{DC})$ entonces

$$m(\widehat{ABC}) = \beta + \gamma = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AD}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}(m(\overset{\frown}{AD}) + m(\overset{\frown}{DC})) = m(\overset{\frown}{AC})$$

3. Cuando $O \in Ext(\widehat{ABC})$ (Se deja como ejercicio). ■

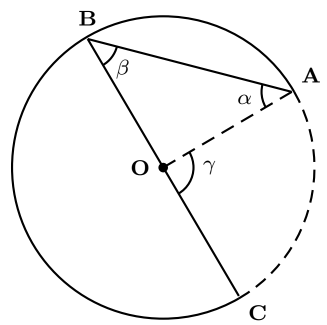


Figura 29.

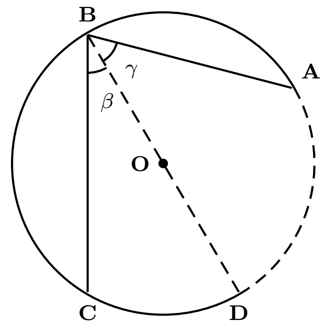


Figura 30.

Corolario 26 (**Arco capáz).** *Todos los ángulos inscritos en el mismo arco capáz son congruentes.*

Corolario 27. *Todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos.*

Definición 53 (**Ángulo semi-inscrito).** *El ángulo cuyo vértice esta sobre la circunferencia, uno de los lados es tangente y el otro es secante a la circunferencia, se le llama ángulo semi-inscrito.*

Teorema 82 (**Del ángulo semi-inscrito).**

La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad de la medida del arco cuyo interior esta en el interior del ángulo.

Demostración. Sea $\overleftrightarrow{AC}$ una recta tangente a la $C(O,r)$ en A y $\overleftrightarrow{AB}$ una secante con $B \in C(O,r)$. Veamos que $m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(A\overset{\frown}{M}B)$.
Se pueden dar tres casos: 1. $\widehat{BAC}$ es agudo. 2. $\widehat{BAC}$ es obtuso. 3. $\widehat{BAC}$ es recto.

1. $\widehat{BAC}$ es agudo (Ver Figura 31.)

Por Playfair, por B pasa $l||\ \overleftrightarrow{AC}$, sea $D \in l \cap C(O,r)$ y $D \neq B$, luego por el Teorema de arcos entre paralelas $A\overset{\frown}{M}B \cong A\overset{\frown}{N}D$ y por el Teorema de los alternos internos entre paralelas, $\widehat{CAB} \cong \widehat{ABD}$, pero el $\widehat{ABD}$ es un ángulo inscrito y la $m(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2}m(A\overset{\frown}{N}D)$, por lo tanto $m(\widehat{CAB}) = \frac{1}{2}m(A\overset{\frown}{M}B)$.

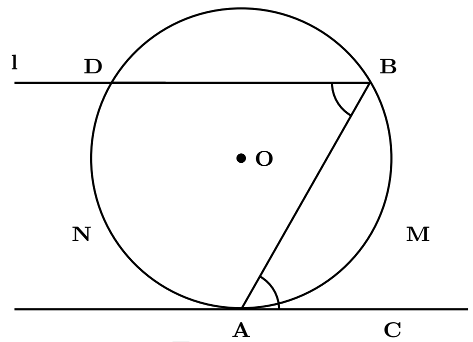


Figura 31.

2. $\widehat{BAC}$ es obtuso (Ver Figura 32.)
Por Playfair, por B pasa $l||\overleftrightarrow{AC}$, sea $D \in l \cap C(O,r)$ y $D \neq B$, luego por el Teorema de arcos entre paralelas $A\overset{\frown}{N}B \cong A\overset{\frown}{M}D$, por lo tanto $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ de aquí que el $\triangle BAD$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles $\widehat{ABD} \cong \widehat{ADB}$. Por otro lado, por el Teorema de los alternos internos entre paralelas, $\widehat{HAB} \cong \widehat{ABD}$ y $\widehat{ADB} \cong \widehat{DAC}$, luego $\widehat{HAB} \cong \widehat{DAC}$ y como el ángulo $\widehat{HAB}$ es agudo, concluimos que el $\widehat{DAC}$ es agudo y como $\widehat{BAC}$ es obtuso y $\widehat{DAC}$ es agudo, tienen el mismo vértice, comparten un lado y están en el mismo semiplano entonces

$$\overrightarrow{AD} \subset Int(\widehat{BAC})$$

luego

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC}) = \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{L}D) + \frac{1}{2}m(D\overset{\frown}{M}A) = \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{D}A)$$

3. $\widehat{BAC}$ es recto (Se deja como ejercicio). ■

Construcción básica: dado el ángulo $\widehat{\alpha}$ y el segmento de longitud a, construir el arco capaz de $\widehat{\alpha}$ y a.
Construcción. (Ver Figura 33.)Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Sobre una recta l fijo un punto A.
- Con centro en A y radio a trazo arco que corta a l en B.

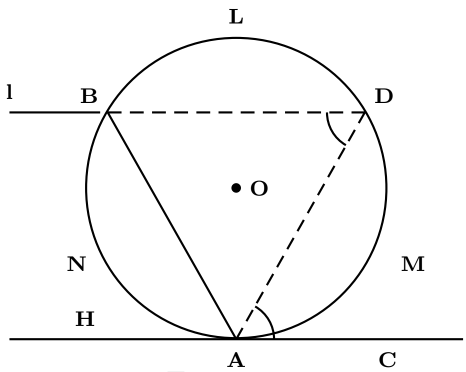


Figura 32.

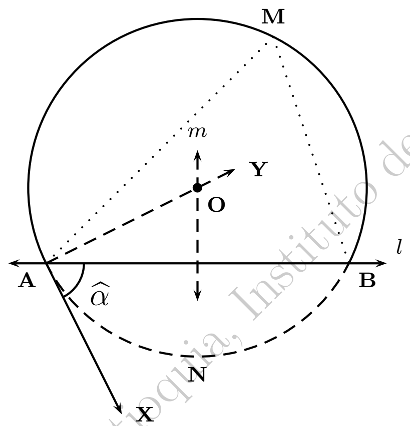


Figura 33.

- Con vértice A y lado $\overrightarrow{AB}$ trazo el ángulo $\widehat{\alpha}$, produciendo la semirrecta $\overrightarrow{AX}$.

- Por A trazo $\overrightarrow{AY} \perp \overrightarrow{AX}$.

- Hallo m mediatriz de $\overline{AB}$, la cual corta a $\overrightarrow{AY}$ en O.

- Con centro en O y radio OA trazo el arco $A\overset{\frown}{M}B$, de tal manera que M y X queden en semiplanos opuestos con respecto a l, el arco $A\overset{\frown}{M}B$ es el arco capaz de a y $\widehat{\alpha}$

Justificación. Como $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2}m(A\overset{\frown}{N}B)$ y por el teorema del ángulo semi-inscrito $\widehat{\alpha} = m(\widehat{BAX}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{ANB})$ entonces

$$m(\widehat{AMB}) = \widehat{\alpha}$$

Teorema 83 (Ángulo con el vértice en el interior de la circunferencia).

La medida de un ángulo que tiene su vértice en el interior de la circunferencia es igual a la semisuma de las medidas de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

Demostración. (Ver Figura 34.)

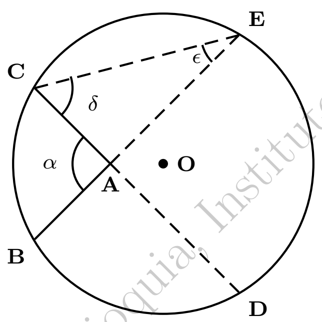


Figura 34.

Veamos que $m(\widehat{BAC}) = \alpha = \frac{1}{2}(m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{DE}))$

Sea $D \in \overleftrightarrow{AC} \cap C(O,r)$ y $E \in \overleftrightarrow{AB} \cap C(O,r)$. Unamos C con E, por el Teorema del ángulo exterior en el $\triangle ACE$ se tiene que $\alpha = \delta + \epsilon$ y por el Teorema del ángulo inscrito $\delta = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{ED})$ y $\epsilon = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$, luego

$$\alpha = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{ED}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC}) = \frac{1}{2}(m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{ED})) \qquad \blacksquare$$

Teorema 84 (Ángulo con el vértice en el exterior de la circunferencia).

La medida del ángulo formado por dos semirrectas con origen común en un punto exterior a una circunferencia es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.

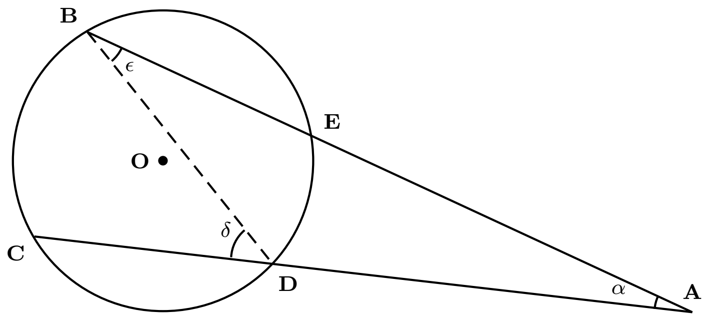


Figura 35.

Demostración. (Ver Figura 35.)
Sea $\widehat{\alpha}$ el ángulo formado por las semirrectas $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Unamos B con D, el ángulo $\widehat{\delta}$ es exterior al $\triangle ABD$, entonces por el teorema del ángulo exterior $\delta = \alpha + \epsilon$, luego $\alpha = \delta - \epsilon$ y por el teorema del ángulo inscrito, $\delta = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$ y $\epsilon = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{ED})$, sustituyendo en la expresión anterior,

$$\alpha = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC}) - \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{ED}) = \frac{1}{2}(m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{ED})) \qquad \blacksquare$$

Corolario 28. *La medida del ángulo formado por dos semirrectas tangentes con origen común en un punto exterior a una circunferencia, es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.*

Corolario 29. *La medida del ángulo formado por dos semirrectas, una tangente y la otra secante, con origen común en un punto exterior a una circunferencia, es igual a la semidiferencia de las medidas de los arcos cuyos interiores están en el interior del ángulo.*

6.6. POLÍGONOS INSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Definición 54.
1. Decimos que un polígono convexo esta inscrito en una circunferencia, si todos sus vértices están sobre la circunferencia; de la circunferencia decimos que esta circunscrita al polígono.

2. Decimos que un polígono convexo está circunscrito a una circunferencia, si todos sus lados son tangentes a la circunferencia; de la circunferencia decimos que está inscrita en el polígono.

Definición 55 (Cuadrilátero cíclico). *Decimos que un cuadrilátero convexo es cíclico si está inscrito en una circunferencia.*

Nota: el rectángulo y el cuadrado son cíclicos, pues el punto de intersección de sus diagonales equidista de sus vértices

Teorema 85.

Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}, \quad \widehat{BDC} \cong \widehat{BAC}, \quad \widehat{CBD} \cong \widehat{CAD}, \quad \widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) La demostración se deja como ejercicio.

($\Leftarrow$) Veamos que si: $\widehat{ACB} \cong \widehat{ADB}$, o $\widehat{BDC} \cong \widehat{BAC}$, o $\widehat{CBD} \cong \widehat{CAD}$, o $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$ entonces $ABCD$ es cíclico.
Como A, B, D son tres puntos no colineales, entonces por el Teorema de determinación de la circunferencia (Teorema 65.), por A, B, D pasa una única circunferencia $C(O, r)$; con respecto a ésta circunferencia y con el punto C pueden suceder tres casos: a. $C \in IntC(O, r)$, b. $C \in ExtC(O, r)$, c. $C \in C(O, r)$.

Veamos que los casos a. y b. producen una contradicción (Ver Figura 36.).

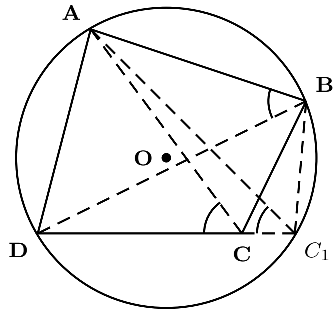


Figura 36.

a. $C \in IntC(O,r)$. Sea $C_1 \in \overleftrightarrow{DC} \cap C(O,r)$ y $C_1 \neq D$, luego por la parte 1. de éste teorema , $\widehat{AC_1D} \cong \widehat{ABD}$, pero por hipótesis $\widehat{ABD} \cong \widehat{ACD}$, luego

$$\widehat{ACD} \cong \widehat{AC_1D}.$$

Por otro lado, como A, C_1, C son tres puntos no colineales, entonces el $\triangle AC_1C$ existe y por el Teorema del ángulo exterior, $\widehat{ACD} > \widehat{AC_1C}$, lo cual es absurdo.
b. $C \in ExtC(O,r)$. Se demuestra en forma similar a a. ■

Teorema 86 (Teorema de los cuadriláteros cíclicos).

Un cuadrilátero convexo es cíclico si y solo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

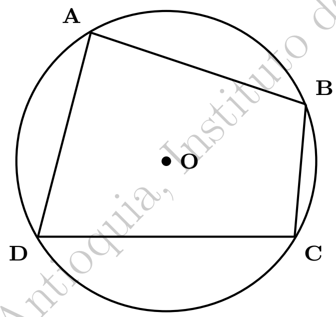


Figura 37.

Demostración. (Ver Figura 37.)
1. Supongamos que el cuadrilátero es cíclico, entonces por el Teorema del ángulo inscrito, $m(\widehat{BAD}) = \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{C}D)$ y $m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{A}D)$, sumando éstas dos últimas expresiones,

$$m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BCD}) = \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{C}D) + \frac{1}{2}m(B\overset{\frown}{A}D) =$$

$$\frac{1}{2}(m(B\overset{\frown}{C}D)+m(B\overset{\frown}{A}D)) = \frac{1}{2}(medida\,de\,la\,circunferencia) = \frac{1}{2}360^{o} = 180^{o}$$

Como la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360^{o} entonces

$$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ADC}) = 180^{o}.$$

2. Veamos que si $m(\widehat{BAD})+m(\widehat{BCD}) = 180^{\underline{o}}$ o $m(\widehat{ABC})+m(\widehat{ADC}) = 180^{\underline{o}}$ entonces $ABCD$ es cíclico.
Como A, B, D son tres puntos no colineales, entonces por el Teorema de determinación de la circunferencia (Teorema 65.), por A, B, D pasa una única circunferencia $C(O, r)$; con respecto a ésta circunferencia y con el punto C pueden suceder tres casos: a). $C \in IntC(O, r)$, b). $C \in ExtC(O, r)$, c). $C \in C(O, r)$.
Veamos que los casos a). y b). producen una contradicción (Ver Figura 38.).

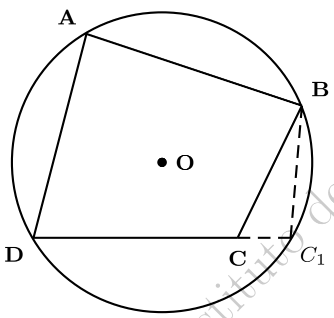


Figura 38.

a). $C \in IntC(O, r)$. Sea $C_1 \in \overleftrightarrow{DC} \cap C(O, r)$ y $C_1 \neq D$, luego por la parte 1. de éste teorema , $m(\widehat{BC_1D}) + m(\widehat{BAD}) = 180^{\underline{o}}$, pero por hipótesis,

$$m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{BAD}) = 180^{\underline{o}},$$

por lo tanto $m(\widehat{BC_1D}) = m(\widehat{BCD})$, es decir, $\widehat{BC_1D} \cong \widehat{BCD}$. Por otro lado, como B, C_1, C son tres puntos no colineales, entonces el $\triangle BC_1C$ existe y por el Teorema del ángulo exterior, $\widehat{BCD} > \widehat{BC_1C}$, lo cual es absurdo.
b). $C \in ExtC(O, r)$. Se demuestra en forma similar a a). ■

Teorema 87 (Recta de Simson).

Las proyecciones desde un punto de la circunferencia circunscrita a un triángulo (distinto de los vértices del triángulo) a los lados o sus prolongaciones, son colineales.

Demostración. (Ver Figura 39.)
Sea P un punto de la circunferencia $C(O, r)$ con P distinto de A, B, C y

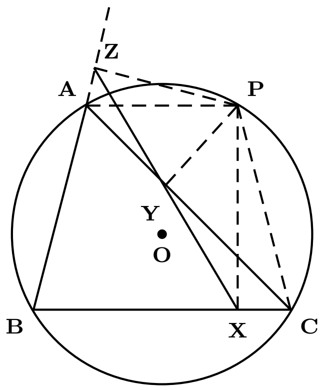


Figura 39.

$P \in \overset{\frown}{AC}$, sean X, Y, Z las proyecciones de P sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente o sobre sus prolongaciones.
Veamos que X, Y y Z son colineales.
Primero veamos que si $Z - A - B$, entonces $B - X - C$. En efecto, como el cuadrilátero $ZPXB$ es cíclico y Z y X están en semiplanos opuestos con respecto a la recta $\overleftrightarrow{BP}$ (donde $\overline{BP}$ es diámetro y $\overline{BP}$ es menor que el diámetro de $C(O,r)$) y Z es exterior a la $C(O,r)$ entonces X es interior a la $C(O,r)$, porque cuando dos circunferencias se interceptan un arco de una de ellas queda en el exterior y el otro arco queda en el interior de la otra circunferencia y por lo tanto $X \in \overline{BC}$, es decir $B - X - C$.
Segundo, veamos que $\widehat{AYZ} \cong \widehat{XYC}$.
Como el cuadrilátero $AYPZ$ es cíclico, entonces

$$\widehat{APZ} \cong \widehat{AYZ}, \qquad (1)$$

y como los triángulos rectángulos $\triangle PYC$ y $\triangle PXC$ tienen hipotenusa común, entonces el cuadrilátero $PYXC$ es cíclico, y por tanto

$$\widehat{CPX} \cong \widehat{CYX}, \qquad (2)$$

Por otro lado, como el cuadrilátero $ABCP$ es cíclico, entonces $\widehat{APC}$ es suplemento de $\widehat{B}$ y también, como el cuadrilátero $ZPXB$ es cíclico, entonces $\widehat{ZPX}$ es suplemento de $\widehat{B}$, por lo tanto

$$\widehat{APC} \cong \widehat{ZPX}, \qquad (3)$$

de (1), (2) y (3) y por resta de ángulos congruentes,

$$\widehat{ZPA} \cong \widehat{CPX}$$

luego

$$\widehat{ZYA} \cong \widehat{XYC}$$

como Z y X están en semiplanos opuestos con respecto a $\overleftrightarrow{AC}$ y A, Y, C son colineales, entonces por el axioma de construcción de ángulo, Z, Y, X son colineales. ■

Teorema 88 (**Teorema de Steiner-Lehmus**).

Si un triángulo tiene dos bisectrices congruentes entonces el triángulo es isósceles.

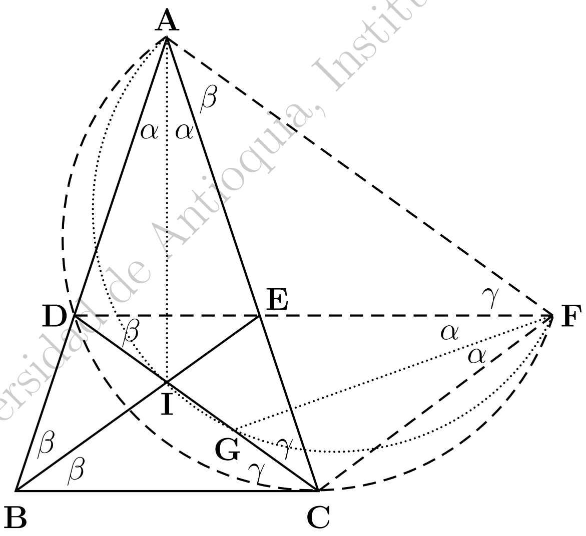


Figura 40.

Demostración. (Ver Figura 40.)
Por hipótesis, $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo $\widehat{B}$ y $\overline{CD}$ es bisectriz del ángulo $\widehat{C}$ y además $\overline{BE} \cong \overline{CD}$.

Por el axioma de construcción de ángulo, existe una semirrecta $\overrightarrow{CF}$ contenida en el semiplano de borde $\overleftrightarrow{CD}$ y que contiene al punto A, tal que $\widehat{DCF} \cong \widehat{AEB}$ y por el axioma de construcción de segmento, existe un punto $F \in \overrightarrow{CF}$ tal que $\overline{CF} \cong \overline{AE}$, por lo tanto $\triangle DCF \cong \triangle AEB$ (L-A-L), luego

$$m(\widehat{FDC}) = m(\widehat{ABE}) = \widehat{\beta}, \qquad m(\widehat{DFC}) = m(\widehat{BAE}) = 2\widehat{\alpha}$$

por esto y por el Teorema 85, el cuadrilátero $ADCF$ es cíclico, sea S la circunferencia que circunscribe al cuadrilátero $ADCF$, luego por el Teorema del ángulo inscrito

$$m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{CAF}) = \widehat{\beta}, \qquad m(\widehat{AFD}) = m(\widehat{ACD}) = \widehat{\gamma}$$

Sea $\overline{FG}$ la bisectriz del ángulo $\widehat{DFC}$ y sea $\overline{AI}$ la bisectriz del ángulo $\widehat{BAC}$ y como son bisectrices de los triángulos congruentes $\triangle DCF$ y $\triangle AEB$, entonces

$$\overline{FG} \cong \overline{AI}, \qquad m(\widehat{IAE}) = m(\widehat{DFG}) = \widehat{\alpha}$$

Como el ángulo $\widehat{CGF}$ es exterior al $\triangle GDF$, entonces por el Teorema del ángulo exterior

$$m(\widehat{CGF}) = \widehat{\beta} + \widehat{\alpha} = m(\widehat{IAE}) + m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{IAF})$$

Puesto que $\widehat{IGF}$ y $\widehat{FGC}$ forman par lineal (o sea que son suplementarios) entonces $\widehat{IAF}$ y $\widehat{IGF}$ son suplementarios, por lo tanto el cuadrilátero $IGFA$ es cíclico; sea S' la circunferencia que circunscribe a éste cuadrilátero y como las cuerdas $\overline{AI}$ y $\overline{FG}$ son congruentes, entonces $\overset{\frown}{AI} \cong \overset{\frown}{FG}$, por lo tanto $\overline{AF}||\overline{IG}$ y por lo tanto el cuadrilátero $AIGF$ es un trapecio isósceles, en consecuencia los ángulos de la base son congruentes o sea

$$\widehat{\beta} + \widehat{\alpha} = \widehat{\gamma} + \widehat{\alpha}$$

luego $\widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$ y por el teorema del triángulo isósceles, el $\triangle ABC$ es isósceles. ■

Definición 56 (Polígono regular). *Decimos que un polígono es regular si todos sus lados y todos sus ángulos son congruentes.*

Teorema 89.

Todo polígono regular es cíclico.

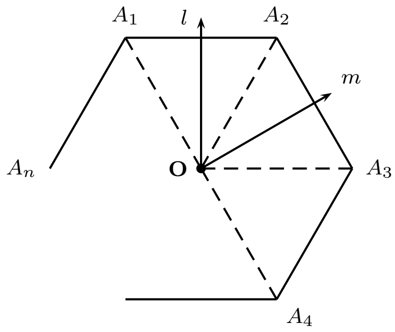


Figura 41.

Demostración. (Ver Figura 41.)
Veamos que existe un punto O tal que

$$\overline{OA_1} \cong \overline{OA_2} \cong \overline{OA_3} \cong \overline{OA_4} \cong \ldots \cong \overline{OA_n}$$

Sean l y m mediatrices de $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_2A_3}$ respectivamente, luego, por el corolario 13 y las propiedades de la mediatriz, existe $O \in l \cap m$ tal que

$$\overline{OA_1} \cong \overline{OA_2} \cong \overline{OA_3}$$

y como $\overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3}$ (por definición de polígono regular), entonces el

$$\triangle A_1OA_2 \cong \triangle A_2OA_3 \quad \text{(por el criterio L-L-L)},$$

luego por la definición de triángulos congruentes y el Teorema del triángulo isósceles,

$$\widehat{OA_1A_2} \cong \widehat{OA_2A_1} \cong \widehat{OA_2A_3} \cong \widehat{OA_3A_2}.$$

Sea α la medida de todos los ángulos congruentes del polígono regular, entonces

$$m(\widehat{OA_1A_2}) = m(\widehat{OA_2A_1}) = m(\widehat{OA_2A_3}) = m(\widehat{OA_3A_2}) = \frac{\alpha}{2}$$

por lo tanto $m(\widehat{OA_3A_4}) = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$ o sea que $\widehat{OA_2A_3} \cong \widehat{OA_3A_4}$ y como $\overline{OA_2} \cong \overline{OA_3}$ y $\overline{A_2A_3} \cong \overline{A_3A_4}$ entonces, por el criterio L-A-L,

$$\triangle OA_2A_3 \cong \triangle OA_3A_4,$$

luego $\overline{OA_3} \cong \overline{OA_4}$.
Similarmente se demuestra que

$$\overline{OA_4} \cong \overline{OA_5}, \ldots, \overline{OA_{n-1}} \cong \overline{OA_n}, \quad \overline{OA_n} \cong \overline{OA_1} \qquad \blacksquare$$

Como en una circunferencia todas las cuerdas congruentes equidistan del centro, entonces este teorema garantiza la verdad de la siguiente definición para un polígono regular.

Definición 57 (**Apotema**). *Se llama apotema de un polígono regular, a la distancia desde el centro de la circunferencia circunscrita a cada lado del polígono.*

El siguiente corolario se deja como ejercicio.

Corolario 30. *Todo polígono regular circunscribe una circunferencia.*

Nota: un polígono regular de n lados lo denotamos por P_n, su lado lo denotamos por l_n, su apotema por a_n y su perímetro por p_n, claramente

$$p_n = n \cdot l_n$$

6.7. Ejercicios y Problemas de la circunferencia

1. En una circunferencia $C(O,r)$, el diámetro $\overline{AB}$ forma con la cuerda $\overline{AC}$ un ángulo de 30^o; se traza una tangente en el punto C que intercepta la prolongación del diámetro $\overline{AB}$ en el punto D. Demostrar que el ΔACD es isósceles.

2. Tres puntos A, B y C de una circunferencia son tales que:

$$m(\overset{\frown}{AB}) = 80^0; m(\overset{\frown}{BC}) = 80^0.$$

Se unen los puntos A, B y C al centro O. Calcular las medidas de los ángulos en O y de los ángulos del triángulo ABC.

3. En una circunferencia de centro O se trazan dos cuerdas $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{AB}$ sub-tiende un arco de 120^0. Desde el centro O se trazan $\overline{ON} \perp \overline{AB}$ en N y $\overline{OM} \perp \overline{AC}$ en M.
a) Encontrar $m(\widehat{BAC}$
b) Mostrar que $\overrightarrow{AO}$ es bisectriz de $\widehat{BAC}$.

4. Sean dos circunferencias de centros O y O' tangentes en A. Trazar por el punto A, la tangente común a esas dos circunferencias. Por un punto P ($\neq A$) de esa tangente, trazar dos tangentes a las circunferencias O y O'. Sean B y C los respectivos puntos de tangencia. Las rectas $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO'}$ se cortan en un punto D. Demostrar:
a) $\overline{PB} \cong \overline{PC}$.
b) P, B, C y D están sobre una misma circunferencia.
c) $\overrightarrow{PD}$ es mediatriz de $\overline{BC}$.

5. Demostrar que un trapecio isósceles es cíclico y que sus diagonales se cortan en el diámetro perpendicular a las bases.

6. Dos circunferencias iguales de centros O y O' se cortan en A y en B. Por el punto A, trazamos una secante que corta a la circunferencia de centro O en C y a la circunferencia de centro O' en D. Probar que el triángulo CBD es isósceles.

7. Si se tiene un paralelogramo inscrito en una circunferencia entonces este es un rectángulo.

8. En una circunferencia con centro O se tienen dos radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ perpendiculares entre si. En sentido contrario a las manecillas del reloj se trazan dos cuerdas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ congruentes. Probar que $\overline{AM} \perp \overline{BN}$.

9. Sea el ΔABC con $\overline{AB} > \overline{AC}$, sea $P \in \overline{BC}$ y $\overline{PM} \perp \overline{AB}$, $\overline{PN} \perp \overline{AC}$, sea $PM = x$ y $PN = y$. Demostrar que

$$h_b > x + y > h_c$$

10. Se tienen dos circunferencias O y O' secantes, que se cortan en los puntos A y B. Por A se traza una recta secante a las dos circunferencias que corta la circunferencia O en M y la circunferencia O' en M'. Por B se traza otra secante a las dos circunferencias que corta la circunferencia O en N y la circunferencia O' en N'. Pruebe que $\overline{MN} \parallel \overline{M'N'}$.

11. Sea $\overline{AB}$ diámetro en la circunferencia $C(O, r)$ y sea $\overline{AD} \,||\, \overline{OC}$, con $D, C \in C(O, r)$. Demostrar que $\overset{\frown}{DC} \cong \overset{\frown}{CB}$ y $\overline{OC} \perp \overline{DB}$.

12. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito una circunferencia la cuerda $\overline{AB}$ sub-tiende un arco igual a $\frac{1}{6}$ de la circunferencia; la cuerda $\overline{DC}$ un arco igual a $\frac{1}{3}$ de la circunferencia y la diagonal $\overline{BD}$, un arco DAB igual a $\frac{5}{12}$ de la circunferencia:
a) Indícar la naturaleza del cuadrilátero $ABCD$.
b) Calcular los ángulos formados por las diagonales.
c) Si se prolongan los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, calcular el ángulo formado por ellos.

13. En una circunferencia se traza una cuerda diametral $\overline{AB}$ y una cuerda $\overline{AC}$, tal que $m\measuredangle BAC = 20^0$, se traza una recta $\overleftrightarrow{ZZ'}$ tangente a la circunferencia en D y paralela a $\overline{AC}$. Hallar el valor de los ángulos $\measuredangle ADZ$ y $m\measuredangle BDZ'$.
(**Rta.:** 35^o, 55^o.)

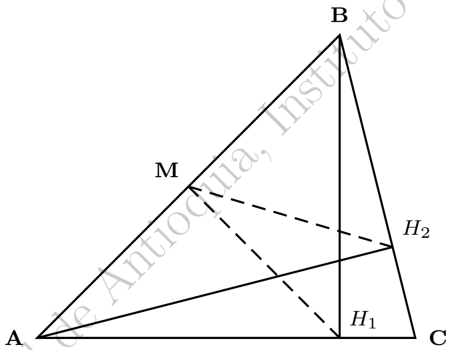
14. Dos circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ son tangentes en el punto A, se trazan dos secantes por A que cortan a $C(O, r)$ y $C(O', r')$ en los puntos

B, B' y C, C' respectivamente. Demostrar que $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$ son paralelas. Hacer la demostración para los dos casos: tangentes exteriormente y tangentes interiormente.

15. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en A, I el centro de la circunferencia en la cual está circunscrito el triángulo. Demostrar que la hipotenusa es el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia que pasa por los puntos B, C, I.

16. Un triángulo ΔABC está inscrito en una circunferencia $C(O,r)$; se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BF}$, que se cortan en H; se prolonga $\overline{AD}$ hasta que encuentre a $C(O,r)$ en M. Demostrar que $\overline{HD} \cong \overline{DM}$.

17. Sea M el punto medio del lado $\overline{AB}$ en el $\triangle ABC$ y sean $\overline{AH_2}$ y $\overline{BH_1}$ alturas. Mostrar que $\triangle H_1MH_2$ es isósceles.(Ver figura)



18. Por un punto A de la cuerda diametral $\overline{DE}$ de una circunferencia, se trazan dos cuerdas $\overline{CC'}$ y $\overline{BB'}$ igualmente inclinadas sobre la cuerda diametral, cortándola en el punto A entre O y E, con B, C en un semiplano y B', C' en el semiplano opuesto con respecto a $\overleftrightarrow{DE}$.

    a) Indicar la naturaleza del cuadrilátero $BCB'C'$ (Justificar).

    b) probar que el cuadrilátero $CBOA$ es cíclico.

19. Demostrar que las tres alturas de un triángulo son las bisectrices de los ángulos del triángulo determinado por los pies de dichas alturas.

20. Construir un trapecio isósceles, dadas las bases y una diagonal.

21. Demostrar que en todo triángulo, la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.

22. A, B, C, D están sobre una circunferencia, $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$, demuestre: $ABCD$ es un trapecio isósceles.

23. $C(O)$ circunferencia de centro O. $D, C \in C(O), \overline{AB}$ es diámetro, $\overline{OC} \parallel \overline{AD}$. Demostrar: $\overset{\frown}{DC} \cong \overset{\frown}{CB}$, $\overline{OC} \perp \overline{BD}$.

24. $\overline{AB}$ es diámetro de $C(O), C, D \in C(O).\overline{OC} \perp \overline{DB}$. Demostrar: $\overset{\frown}{DC} \cong \overset{\frown}{CB}, \overline{OC} \parallel \overline{AD}$.

25. A, B, C, D están en $C(O)$. $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz de $\widehat{BAD}$, I es el incentro del triángulo ΔABD. Demuestre: $\overline{CB} \cong \overline{CI} \cong \overline{CD}$.

26. Demostrar que si dos circunferencias son secantes, la recta que une los centros es mediatriz de la cuerda determinada por los puntos de intersección de las dos circunferencias.

27. Demostrar que todo trapecio, inscrito en una circunferencia, es isósceles.

28. Demostrar que todo rombo, inscrito en una circunferencia, es un cuadrado.

29. Demostrar que la medida del lado de un hexágono regular inscrito, es igual al radio de la circunferencia.

30. Demostrar que en un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las medidas de dos lados opuestos, es igual a la suma de las medidas de los otros dos lados.

31. Se prolongan los lados opuestos de un cuadrilátero cíclico hasta cortarsen en los puntos M y N. Demostrar que las bisectrices de $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$ son perpendiculares.

32. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos segmentos tangentes. Los puntos de tangencia determinan dos arcos cuyas medidas están en la relación de 4 a 1. Calcular:
a)la medida del ángulo formado por las dos tangentes, b) la medida de los ángulos semi-inscritos que se forman al trazar la cuerda que une los

puntos de tangencia, c) la medida de los arcos sub-tendidos por las dos tangentes y d) la medida del ángulo central que se forma al trazar los segmentos radiales a los puntos de tangencia.
(**Rta.:** a)108^o, b) 36^o, c) 72^o y 288^o, d) 72^o)

33. Se inscribe un triángulo isósceles ABC en un circunferencia. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overrightarrow{AX}$ bisectriz de $\widehat{BAC}$; X pertenece a la circunferencia. Demostrar que $\overrightarrow{AX}$ pasa por el centro del circunferencia y que $\widehat{ABX}$ es recto.

34. El triángulo ΔABC es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y esta inscrito en una circunferencia. $X \in \overset{\frown}{BC}$. Demuestre que $\overrightarrow{XA}$ es bisectriz de $\widehat{BXC}$.

35. Se tienen dos circunferencias exteriores y se trazan las tangentes interiores a éstas. Demostrar que los segmentos de éstas tangentes determinados por los puntos de tangencia son congruentes y que el punto de intersección de dichas tangentes y los centros de las dos circunferencias son colineales.

36. Se tienen dos circunferencias no congruentes. Si a dichas circunferencias se les trazan dos tangentes exteriores, demostrar que los segmentos determinados por los puntos de tangencia son congruentes y que si se prolongan dichas tangentes hasta que se intersecten en un punto P, este punto es colineal con los centros de las dos circunferencias.

37. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ en el trapecio $ABCD$. $\overrightarrow{AY}$ es bisectriz de $\widehat{A}$. $\overrightarrow{BY}$ es bisectriz de $\widehat{B}$. $\overrightarrow{CX}$ es bisectriz de $\widehat{C}$. $\overrightarrow{DX}$ es bisectriz de $\widehat{D}$. $\overrightarrow{DX} \cap \overrightarrow{AY} = \{M\}, \overrightarrow{CX} \cap \overrightarrow{BY} = \{N\}$. Demostrar que $MXNY$ es cíclico y $\overline{XY}$ es diámetro de la circunferencia circunscrita a $MXNY$.

38. $C(O, r)$ y $C(O_1, r_1)$ son dos circunferencias no congruentes, tangentes en T. $A, C \in C(O, r)$ y $B, D \in C(O_1, r_1)$. $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{T\}$. Demostrar que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.

39. Sean $C(O, r)$, $C(O', r')$ secantes en A y B. Por B se traza el segmento $\overline{MN}$, con $M \in C(O, r)$ y $N \in C(O', r')$. Demostrar que el ángulo $\widehat{MAN}$ permanece constante cuando M y N se mueven sobre las circunferencias.

40. Demostrar que el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden X y Y y cuya hipotenusa mide Z, mide:
$$\frac{1}{2}(X+Y-Z).$$

41. Un rectángulo esta inscrito en una circunferencia. Por los vértices del rectángulo se trazan tangentes a la circunferencia que se intersectan dos a dos. Demostrar que el cuadrilátero formado por las tangentes al intersectarse, forman un rombo.

42. Desde el punto medio de un arco $\overset{\frown}{AB}$ se trazan dos cuerdas $\overline{MC}$ y $\overline{MD}$ que intersectan a $\overline{AB}$ en los puntos H y K respectivamente. Demostrar que $HKDC$ es cíclico o inscriptible.

43. Sean t, t' y t'' rectas tangentes a la circunferencia $C(O,r)$ en los puntos P, Q y R respectivamente y sea $\{A\} = t \cap t'$ y $\{B\} = t' \cap t''$, si $t \,||\, t''$, desmostrar que ΔAOB es rectángulo.

44. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es secante a una circunferencia en A y B. Por el punto B se traza la cuerda $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. Demostrar que el diámetro paralelo a $\overline{AB}$ biseca al segmento cuyas extremos son C y un punto cualquiera de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

45. El triángulo ΔABC está inscrito en la circunferencia de centro O. $\overline{AD}$ es la altura correspondiente a $\overline{BC}$ y H es el ortocentro. N, Q, P son 1os puntos medios de $\overline{AH}, \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Demostrar que $OPNQ$ es un paralelogramo. (Trace $\overline{BH}, \overline{OP}$ y $\overline{OH}$).

46. Sean dos circunferencias de centros O y O', secantes en A y B. Desde A se trazan los diámetros $\overline{AOC}$ y $\overline{AO'D}$. Se une C con D. Demostrar que $\overline{CD} \perp AB$ y que C, B y D están alineados.

47. Por un punto A exterior a una circunferencia de centro O, se traza una tangente $\overline{AB}$ a la circunferencia en B y se traza $\overline{AO}$. Sobre $\overline{AO}$ se toma $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ y se traza $\overline{BC}$ que corta la circunferencia en E. Probar que $\overline{EO} \perp \overline{OA}$.

48. Demostrar que si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, trazadas en una misma circunferencia de centro O son congruentes, entonces el radio $\overline{OB}$ divide la cuerda $\overline{AC}$ y el arco $\overset{\frown}{ABC}$ en partes iguales respectivamente.

49. Por los extremos A y B de un diámetro de una circunferencia de centro O, se trazan dos cuerdas paralelas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

    a) Mostrar que esas cuerdas equidistan del centro O y por consiguiente son congruentes.
    b) Mostrar que el segmento $\overline{DC}$ es un diámetro.
    c) Cual es la naturaleza del cuadrilátero $ABCD$?

50. Un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$) esta inscrito en una circunferencia de centro O. Las bisectrices $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{CF}$ de los ángulos de la base cortan la circunferencia en D y F.
    Comparar los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle BAD$.

51. Sea el ΔABC rectángulo en B, sean M, N, L los puntos medios de la hipotenusa y los catetos respectivamente, por M, N, L se hace pasar una circunferencia. Mostrar que el arco exterior a la hipotenusa es igual a la diferencia de los arcos exteriores a los catetos.

52. La recta l es secante a la $C(O, r)$ en A y B. Por el punto B se traza la cuerda $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. Demostrar que el diámetro paralelo a $\overline{AB}$ biseca el segmento cuyos extremos son C y un punto cualquiera de la recta l.

53. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas que concurren en un punto que esta sobre una circunferencia dada. Justifique.

54. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de una circunferencia, paralelas a una recta dada. Justifique.

55. Hallar los ángulos de un cuadrilátero cíclico $ABCD$, sabiendo que la diagonal $\overline{AC}$ forma con los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ ángulos de 45^o y con la diagonal $\overline{BD}$ un ángulo de 70^o

56. Sea $ABCD$ un cuadrilátero circunscrito a la $C(O, r)$, sea N el punto de tangencia de la circunferencia con el lado $\overline{AB}$, R el punto de tangencia de la circunferencia con el lado $\overline{BC}$, S el punto de tangencia de la circunferencia con el lado $\overline{CD}$ y M el punto de tangencia de la circunferencia con el lado $\overline{DA}$, si $m(\overset{\frown}{MS}) = 108^o$, $m(\overset{\frown}{SR}) = 120^o$ y $m(\overset{\frown}{RN}) = 45^o$. Hallar:

a) las medidas de los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$.
b) las medidas de los ángulos del cuadrilátero inscrito $MNRS$.

57. Sean $\overleftrightarrow{BA}$ y $\overleftrightarrow{BD}$ rectas tangentes a la circunferencia $C(O,r)$ en los puntos A, D, sea $C \in \overline{BA}$, sea $\overleftrightarrow{CE}$ tangente a la circunferencia en E. Demostrar que $\widehat{BOC} \cong \widehat{DAE}$.

58. Demostrar que una circunferencia es inscriptible en un cuadrilátero $ABCD$ sii la suma de las medidas de los lados opuestos son iguales, es decir, sii $AB + CD = BC + AD$. (Ayuda: suponga que $AB > BC$)

Construcciones con regla y compás.

59. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados y su centro se encuentre sobre una recta dada.

60. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado, pase por un punto dado y sea tangente a una recta dada.

61. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado, pase por un punto dado y sea tangente a otra circunferencia dada.

62. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a dos rectas dadas que se interceptan.

63. Trazar una circunferencia que pase por un punto y sea tangente a dos rectas paralelas dadas.

64. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a una circunferencia y a una recta dadas.

65. Trazar una circunferencia que tenga un radio dado y sea tangente a dos circunferencias dadas.

66. Trazar una tangente a una circunferencia que sea paralela a una recta l dada.

67. Construir una circunferencia que sea tangente a una recta dada en un punto dado sobre esta recta y pase por otro punto dado.

68. Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y sobre ella, el pie de la bisectriz del ángulo recto.

69. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas no paralelas dadas y que tenga su centro sobre una recta dada secante a las dos primeras y que no pase por el punto de intersección de ellas dos.

70. Construir un triángulo dados:
    a) a, α, m_a. b) a, α, h_a. c) h_a, m_a, α.

71. Trazar las tangentes exteriores y las interiores a dos circunferencias exteriores.

72. Construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas (dos casos: cuando las tres rectas son secantes y cuando dos de las rectas son paralelas).

73. Dada la $C(O, r)$ y dado $A \in l$, construir una circunferencia que sea tangente a la $C(O, r)$, tenga el centro sobre l y pase por A.

CAPÍTULO 7

SEMEJANZA

7.1. INTRODUCCIÓN

Definición 58. *a.* **Razón:** *se llama razón, al cociente de dos cantidades, expresadas en la misma magnitud, por ejemplo* $\frac{a}{b}$.

b. **Proporción:** *se llama proporción a la igualdad de dos razones. Por ejemplo* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, a los términos* $\underline{a}$ *y* $\underline{d}$ *se les llama extremos y los términos* $\underline{b}$ *y* $\underline{c}$ *se les llama medios, al término* $\underline{d}$ *se le llama cuarta proporcional entre* $\underline{a}$*,* $\underline{b}$ *y* $\underline{c}$ *en este orden.*

En algunos textos de geometría se utiliza la notación de proporción así: $a : b = c : d$ que se lee "$\underline{a}$ es a $\underline{b}$ como $\underline{c}$ es a $\underline{d}$"

Propiedades de las proporciones:

1. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$
2. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{e}$ entonces $d = e$
3. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ o $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ o $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
4. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a\pm b}{b} = \frac{c\pm d}{d}$ o $\frac{a\pm b}{a} = \frac{c\pm d}{c}$
5. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$ o $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

6. Si $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ entonces

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \ldots = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$$

7. Si $\underline{b}$ es una magnitud tal que $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, entonces decimos que $\underline{b}$ es media proporcional entre $\underline{a}$ y $\underline{d}$ o lo que es lo mismo: $\underline{b}$ es media proporcional entre $\underline{a}$ y $\underline{d}$ si y solo si $b^2 = a \cdot d$.

7.2. PARALELISMO Y PROPORCIONALIDAD

Definición 59. *1. Un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ divide al segmento $\overline{AB}$ en una razón r si $\frac{PA}{PB} = r$.*
Si $r = 1$ entonces P es el punto medio de $\overline{AB}$.

Figura 1.

2. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y sean $X \in \overleftrightarrow{AB}$ y $Y \in \overleftrightarrow{CD}$, decimos que X e Y dividen a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en segmentos proporcionales si

$$\frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD}$$

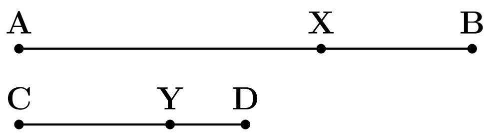


Figura 2.

El siguiente Lema, llamado el Teorema fundamental del paralelismo es en realidad una generalización del Teorema de la paralela media.

Lema 1 (Teorema fundamental del paralelismo).

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante entonces determinan segmentos congruentes sobre cualquier otra secante.

Demostración. (Ver Figura 3.)

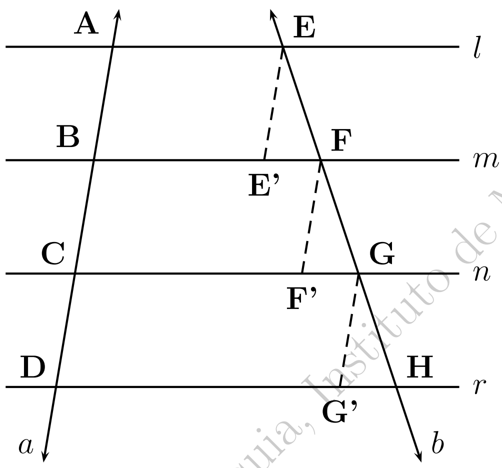


Figura 3.

Sean l, m, n, r cuatro rectas paralelas y a una secante que corta a estas paralelas en A, B, C, D tales que $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$. Sea b otra secante que corta a las paralelas en E, F, G, H. Veamos que $\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH}$.
Por Playfair, por E, F, G pasan $\overleftrightarrow{EE'}$, $\overleftrightarrow{FF'}$, $\overleftrightarrow{GG'}$ paralelas a a, donde $E' \in m$, $F' \in n$, $G' \in r$.
Por la proposición 2., $\overline{AB} \cong \overline{EE'}$, $\overline{BC} \cong \overline{FF'}$ y $\overline{CD} \cong \overline{GG'}$ luego $\overline{EE'} \cong \overline{FF'} \cong \overline{GG'}$ y como los ángulos $\widehat{E'EF} \cong \widehat{F'FG} \cong \widehat{G'GH}$ por correspondientes entre paralelas y por la proposición número 1, $\widehat{EE'F} \cong \widehat{FF'G} \cong \widehat{GG'H}$ y por el criterio A-L-A, los siguientes triángulos son congruentes:

$$\triangle EE'F \cong \triangle FF'G \cong \triangle GG'H,$$

luego

$$\overline{EF} \cong \overline{FG} \cong \overline{GH} \qquad \blacksquare$$

Teorema 90.

Dado un número entero n y dado un segmento, existen puntos en el interior del segmento que lo dividen en n segmentos congruentes.

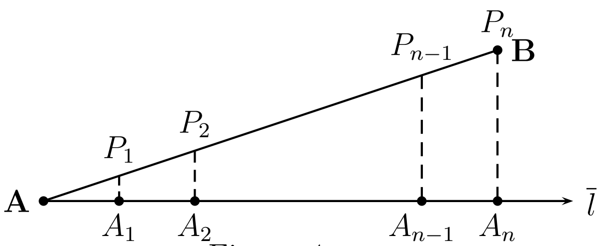


Figura 4.

Demostración. (Ver Figura 4.)
Sea $\overline{AB}$ un segmento y n un número entero, veamos que existen puntos P que dividen al segmento en n segmentos congruentes. Sea $\bar{l}$ una semirrecta cualesquiera, con origen en A tal que $\bar{l}$ no esté contenida en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Sobre la semirrecta $\bar{l}$, por el Axioma de continuidad de Arquímedes, existen puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ tales que

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$$

Por Playfair, por $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pasan paralelas a $\overline{A_nB}$, las cuales se intersectan con $\overline{AB}$ en $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$, entonces por el lema anterior

$$\overline{AP_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \ldots \overline{P_{n-1}B}$$ ■

Definición 60 (Segmentos conmensurables e inconmensurables). *Decimos que un segmento es conmensurable si su medida es un número racional y decimos que un segmento es inconmensurable si su medida es un número irracional.*

Teorema 91 (Teorema de Tales).

Si tres o más paralelas cortan a dos o más secantes entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

Demostración. (Ver Figura 5.)
Sean $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ rectas paralelas que cortan las secantes a, b en los puntos A, D, B, E, C, F respectivamente.

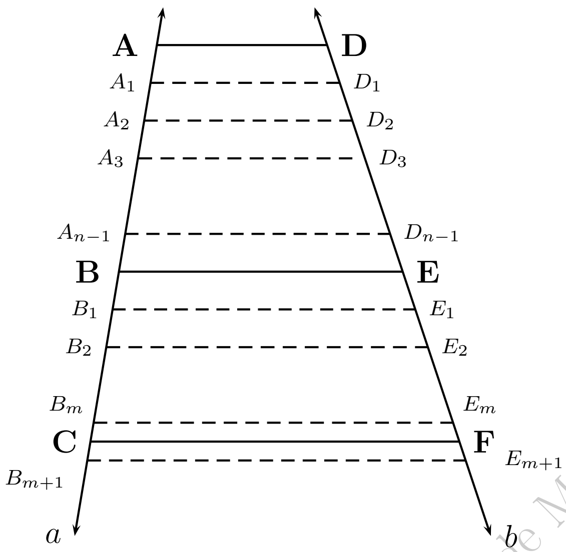


Figura 5.

Veamos que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ o equivalentemente $\frac{BC}{AB} = \frac{EF}{DE}$
Llamemos $x = \frac{BC}{AB}$ e $y = \frac{EF}{DE}$ y veamos que $x = y$
Sea n un número entero cualesquiera, entonces por el Teorema 90., existen puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ que dividen al segmento $\overline{AB}$ en n segmentos congruentes:

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \overline{A_2A_3} \cong \ldots \cong \overline{A_{n-1}B}, \qquad AB = nAA_1.$$

Por Playfair, por $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pasan rectas paralelas a $\overleftrightarrow{AD}$ que cortan a b en $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$, luego por el Lema 1. (Teorema fundamental del paralelismo), los segmentos:

$$\overline{DD_1} \cong \overline{D_1D_2} \cong \overline{D_2D_3} \cong \ldots \cong \overline{D_{n-1}E}, \qquad DE = nDD_1.$$

Por el Axioma de Arquímedes, existen puntos $B_1, B_2, \ldots, B_m, B_{m+1}$ en la $\overrightarrow{BC}$ tales que

$$\overline{BB_1} \cong \overline{B_1B_2} \cong \overline{B_2B_3} \cong \ldots \cong \overline{B_mB_{m+1}} \cong \overline{AA_1},$$

y C entre B, B_{m+1}, por tanto $BB_m = mAA_1$.
Luego,

$$\frac{BB_m}{AB} = \frac{mAA_1}{nAA_1} = \frac{m}{n}$$

Por Playfair, por $B_1, B_2, \ldots, B_m, B_{m+1}$ pasan paralelas a $\overleftrightarrow{AD}$ que cortan a $\overrightarrow{EF}$ en los puntos

$$E_1, E_2, \ldots, E_m, E_{m+1}$$

y por el Lema 1. (Teorema fundamental del paralelismo),

$$\overline{EE_1} \cong \overline{E_1E_2} \cong \overline{E_2E_3} \cong \ldots \cong \overline{E_mE_{m+1}}, \qquad EE_m = mDD_1.$$

y F entre E y E_{m+1}, ya que C esta entre B y B_{m+1} luego

$$\frac{EE_m}{DE} = \frac{mDD_1}{nDD_1} = \frac{m}{n}$$

Dos casos pueden ocurrir: a.) $x = \frac{m}{n}$ o b.) $x > \frac{m}{n}$ (¿porque no ocurre el caso $x < \frac{m}{n}$?).
a.) Si $x = \frac{m}{n}$, entonces

$$\frac{BC}{AB} = x = \frac{m}{n} = \frac{mAA_1}{nAA_1} = \frac{BB_m}{AB}$$

y por lo tanto $BC = BB_m$ y como C y B_m están del mismo lado con respecto a B entonces por el axioma de construcción de segmento, $C \equiv B_m$, entonces $F \equiv E_m$, luego $\frac{m}{n} = \frac{EE_m}{DE} = \frac{EF}{DE} = y$.

b.) Supongamos que $x > \frac{m}{n}$ entonces $x = \frac{BC}{AB} > \frac{m}{n}$ o sea que

$$\frac{BC}{nAA_1} > \frac{m}{n} \quad \text{y} \quad mAA_1 < BC < (m+1)AA_1$$

y

$$mDD_1 < EF < (m+1)DD_1$$

por lo tanto

$$y = \frac{EF}{DE} = \frac{EF}{nDD_1} > \frac{mDD_1}{nDD_1} = \frac{m}{n}.$$

En resumen, hemos demostrado que si $x > \frac{m}{n}$ entonces $y > \frac{m}{n}$.
De la misma manera se demuestra que si $y > \frac{m}{n}$ entonces $x > \frac{m}{n}$.
Hasta aquí, hemos demostrado que **para todo número racional** $\frac{m}{n}$, si $x > \frac{m}{n}$ entonces $y > \frac{m}{n}$ y recíprocamente, si $y > \frac{m}{n}$ entonces $x > \frac{m}{n}$. En otras palabras, todo número racional a la izquierda de x esta también a la izquierda de y y todo número racional a la izquierda de y esta a la izquierda de x. Todo esto significa que **no hay un número racional** entre x e y, ya

que si hubiera un número racional entre x e y entonces estaría a la izquierda de uno de ellos y a la derecha del otro, lo cual contradice lo demostrado; por lo tanto $x = y$, es decir:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \blacksquare$$

Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo). *Toda recta paralela a un lado de un triángulo y que corte a los otros dos lados, divide a estos lados en segmentos proporcionales.*

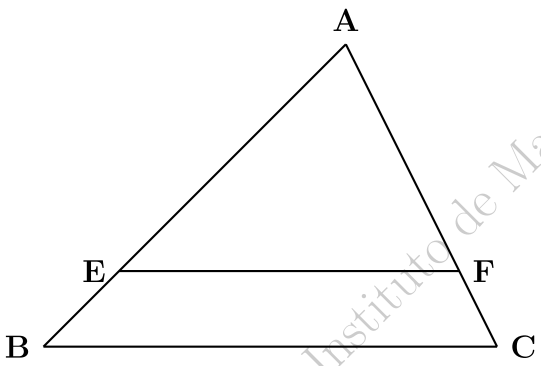


Figura 6.

Lo que afirma este corolario es que si $\overline{EF}||\overline{BC}$ entonces $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FC}$; por las propiedades de las fracciones

$$\frac{EA+EB}{EB} = \frac{FA+FC}{FC} \quad \text{y} \quad \frac{EA}{AE+EB} = \frac{FA}{AF+FC}$$

luego

$$\frac{AB}{EB} = \frac{AC}{FC} \quad \text{y} \quad \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$$

esto demuestra el siguiente corolario.

Corolario 32. *Dos lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos que en ellos determina cualquier recta paralela al tercer lado.*

El siguiente teorema es el recíproco del Corolario 31

Teorema 92 (Recíproco del Teorema de Tales en el triángulo).

Si una recta intercepta dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.

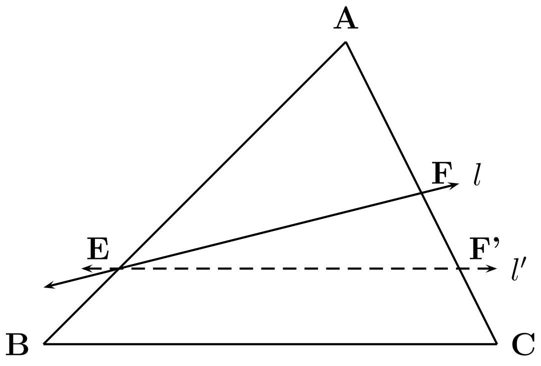


Figura 7.

Demostración. (Ver Figura 7.)
Sea el $\triangle ABC$ y l una recta tal que

$$l \cap \overline{AB} = \{E\},\ l \cap \overline{AC} = \{F\}, \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

Por Playfair, por E pasa $l'||\overline{BC}$ la cual intercepta a $\overline{AC}$ en F', entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo), se tiene:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF'}{F'C}$$

luego $\frac{AF}{FC} = \frac{AF'}{F'C}$ y por las propiedades de las fracciones $\frac{FC}{AF} = \frac{F'C}{AF'}$ o sea que

$$\frac{FC + AF}{AF} = \frac{F'C + AF'}{AF'}$$

que es lo mismo que

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AC}{AF'}$$

luego $AF = AF'$ y por tanto $\overline{AF} \cong \overline{AF'}$ y como F, F' están del mismo lado con respecto a A entonces por el axioma de construcción de segmento $F' \equiv F$ y por lo tanto $\overline{EF}||\overline{BC}$. ■

En forma similar se demuestran los siguientes recíprocos:

Corolario 33 (Recíproco del Corolario 32). *Si dos lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos que en ella determina una recta que intercepta los dos lados, entonces la recta es paralela al tercer lado del triángulo.*

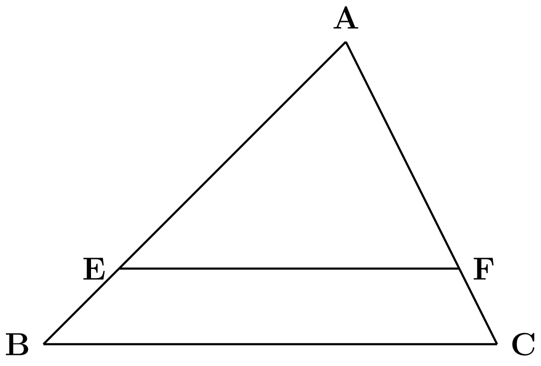


Figura 8.

Lo que afirma este corolario es que si en el $\triangle ABC$ (Ver Figura 8.)

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{EB} = \frac{AC}{FC}$$

entonces $\overline{EF} || \overline{BC}$

Teorema 93 (Propiedades métricas de la bisectriz de un triángulo).

La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración. (Ver Figura 9.)
Sea $\overline{AV}$ bisectriz de $\widehat{A}$ en el $\triangle ABC$ con $V \in Int\overline{BC}$. Veamos que $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$.
Por Playfair, por C pasa $l||\overline{AV}$; sea $\{D\} = l \cap \overleftrightarrow{BA}$, luego por alternos internos entre paralelas, $\widehat{VAC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{BAV} \cong \widehat{ADC}$, pero como $\overline{AV}$ es bisectriz por hipótesis, entonces $\widehat{BAV} \cong \widehat{VAC}$, luego

$$\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$$

y por el teorema del triángulo isósceles, se tiene que $\triangle ADC$ es isósceles y por lo tanto

$$\overline{AD} \cong \overline{AC}.$$

Por el corolario 32 (Teorema de Tales en el triángulo),

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AD},$$

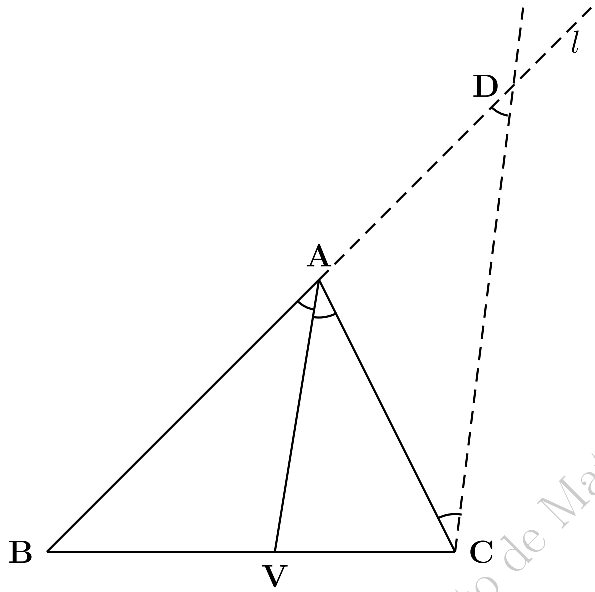


Figura 9.

luego

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 94 (Recíproco del teorema anterior).

Si una recta que pasa por el vértice de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados, entonces esta recta es bisectriz del ángulo ubicado en el vértice por donde pasa la recta.

Demostración. (Ver Figura 10.)

Supongamos que en el $\triangle ABC$ se tiene que $\overleftrightarrow{AV}$ con $V \in Int\overline{BC}$, tal que $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC}$. Veamos que $\overline{AV}$ es bisectriz de $\widehat{A}$.

Por Playfair, por C pasa $l||\overline{AV}$; sea $\{D\} = l\cap \overleftrightarrow{BA}$.

Como $l||\overline{AV}$, entonces por el corolario 32, $\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AD}$, pero por hipótesis

$$\frac{VB}{VC} = \frac{AB}{AC},$$

entonces

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AD}$$

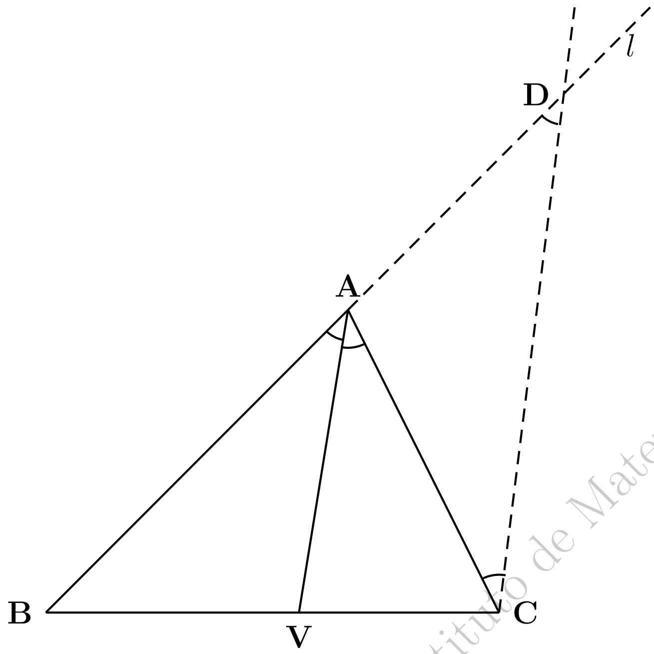


Figura 10.

y por las propiedades de las fracciones $AD = AC$ o sea que $\overline{AD} \cong \overline{AC}$, por lo tanto el $\triangle ADC$ es isósceles y por el Teorema del triángulo isósceles, $\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$.
Por otro lado, por alternos internos entre paralelas, $\widehat{VAC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{BAV} \cong \widehat{ADC}$.
Luego $\widehat{BAV} \cong \widehat{VAC}$, luego $\overline{AV}$ es bisectriz de $\widehat{A}$. ■

Teorema 95 (Propiedades métricas de la bisectriz exterior de un triángulo).

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo, que no sea paralela al lado opuesto, divide exteriormente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Demostración. (Ver Figura 11.)
Sea $\overline{AV'}$ bisectriz del ángulo exterior $\widehat{EAC}$ en el $\triangle ABC$ con $V' \in \overleftrightarrow{BC}$ y $B - C - V'$. Veamos que $\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AC}$.
Por Playfair, por C pasa $l || \overline{AV'}$; sea $\{D\} = l \cap \overleftrightarrow{BA}$, luego por alternos

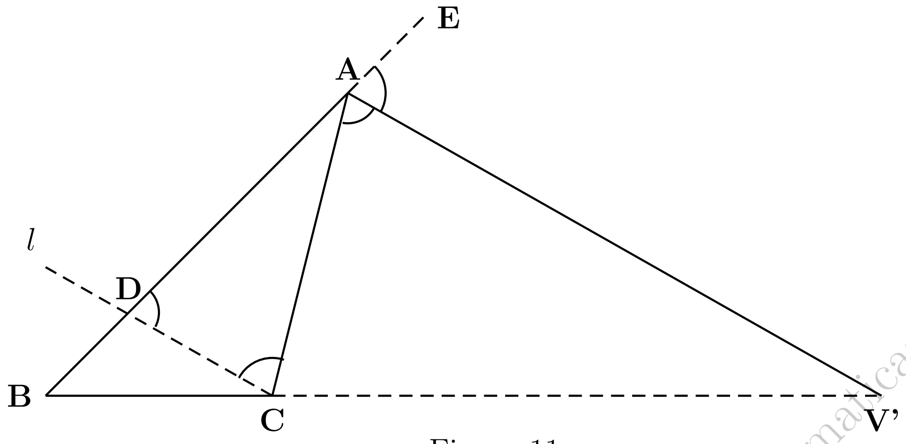


Figura 11.

internos entre paralelas, $\widehat{V'AC} \cong \widehat{ACD}$ y por correspondientes entre paralelas, $\widehat{EAV'} \cong \widehat{ADC}$, pero como $\overline{AV'}$ es bisectriz por hipótesis, entonces $\widehat{CAV'} \cong \widehat{V'AE}$, luego

$$\widehat{ADC} \cong \widehat{ACD}$$

y por el teorema del triángulo isósceles, se tiene que $\triangle ADC$ es isósceles y por lo tanto

$$\overline{AD} \cong \overline{AC}.$$

Por el corolario 32 (Teorema de Tales en el triángulo),

$$\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AD},$$

luego

$$\frac{V'B}{V'C} = \frac{AB}{AC}. \qquad \blacksquare$$

El recíproco de este teorema se deja como ejercicio.

Teorema 96 (Recíproco del Teorema anterior).

Una recta que pase por el vértice de un triángulo y divida la prolongación del lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo, es bisectriz del ángulo exterior ubicado en este vértice.

Definición 61 (División armónica). *Si A y B son dos puntos distintos y $C \in Int\overline{AB}$ y $D \in \overleftrightarrow{AB}$ pero $D \notin \overline{AB}$, decimos que C, D dividen armónicamente a $\overline{AB}$ si*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

Figura 12.

A los puntos C y D se les llama los conjugados armónicos con respecto a A y B.
Los puntos A, B, C, D en este orden, se dice que forman una división armónica.
También, de acuerdo a la definición, podemos afirmar que A y B son conjugados armónicos con respecto a $\overline{CD}$.

Por los teoremas 93 y 95 y por la definición de conjugado armónico, podemos afirmar el siguiente teorema.

Teorema 97.

La bisectriz de un ángulo de un triángulo y la bisectriz del ángulo exterior adyacente, dividen al lado opuesto armónicamente.

Nota: de acuerdo a los teoremas anteriores, el lugar geométrico de los puntos A tales que la razón de las distancias a dos puntos fijos B y C sea una constante k, es una circunferencia de diámetro $\overline{VV'}$, donde V, V' son los conjugado armónicos de $\overline{BC}$ con razón k.

7.3. SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Definición 62 (Polígonos semejantes). *Decimos que dos polígonos son semejantes con razón de semejanza r, si se puede establecer una correspondencia entre sus lados y sus ángulos de tal manera que:*

1. Los lados correspondientes son proporcionales. A estos lados también los llamaremos lados homólogos. La razón r entre los lados homólogos la llamamos razón de semejanza.
2. Los ángulos correspondientes son congruentes. A los ángulos correspondientes congruentes, también se les llama ángulos homólogos.

Definición 63 (Polígonos congruentes). *Decimos que dos polígonos semejantes, son congruentes si su razón de semejanza* $r = 1$.

Teorema 98.
Dos polígonos semejantes son congruentes si un lado de uno de ellos es congruente con su homólogo.

En particular, para los triángulos tenemos la siguiente definición.

Definición 64 (Triángulos semejantes). *Decimos que el* $\triangle ABC$ *es semejante al* $\triangle A'B'C'$, *lo cual denotamos así* $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, *si:*

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (*), \quad \widehat{A} \cong \widehat{A'}, \quad \widehat{B} \cong \widehat{B'}, \quad \widehat{C} \cong \widehat{C'} \quad (**)$$

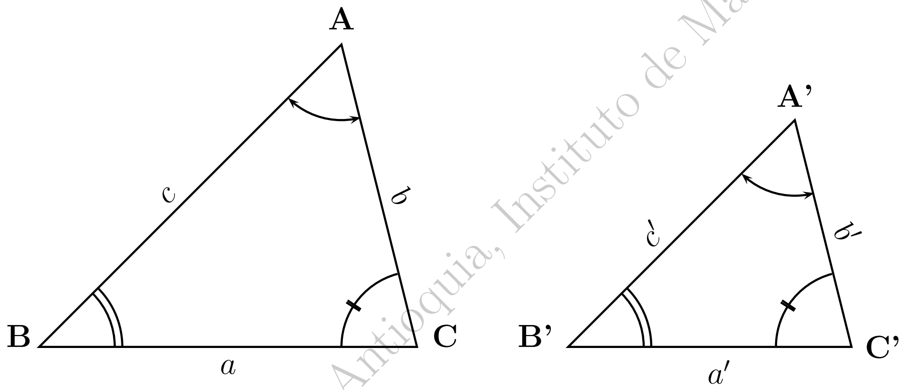


Figura 13.

En este caso decimos que los vértices A y A', B y B', C y C', los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$ y los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{A'}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{B'}$, $\widehat{C}$ y $\widehat{C'}$ son homólogos o correspondientes.

Nota: 1. Con los teoremas que haremos más adelante, mostraremos que (*) implica (**) y recíprocamente, (**) implica (*).

2. Por las propiedades de las fracciones, se puede demostrar que si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados son entre si como sus perímetros, es decir, si $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ entonces

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{p}{p'} = r$$

donde $p = a + b + c$ =perímetro del $\triangle ABC$, $p' = a' + b' + c'$ =perímetro del $\triangle A'B'C'$ y r es la razón de semejanza.

3. La relación de semejanza entre polígonos es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva (Ejercicio).

A continuación veremos tres criterios de semejanza de triángulos.

Teorema 99 (**Primer criterio de semejanza: Angulo-Angulo (A-A)**).

Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

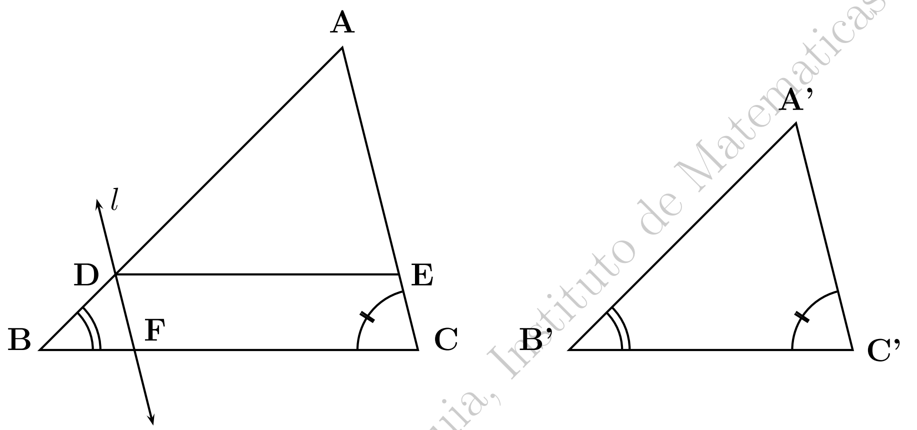


Figura 14.

Demostración. (Ver Figura 14.) Supongamos que en los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene que $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$, entonces por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$.
Por el axioma de construcción de segmento, existe un punto $D \in \overrightarrow{AB}$ y $E \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$; unamos D con E, entonces por el criterio L-A-L, el $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$, por lo tanto $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$, $\widehat{ADE} \cong \widehat{B'}$, pero por hipótesis $\widehat{B'} \cong \widehat{B}$, por lo tanto $\widehat{ADE} \cong \widehat{B}$ y por el teorema de alternos internos (Teorema 31), $\overline{DE} || \overline{BC}$ y por el corolario 32,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (*)$$

Por Playfair, por D pasa $l || \overleftrightarrow{AC}$, sea $\{F\} = l \cap \overleftrightarrow{BC}$ y por la proposición número 2, $\overline{DE} \cong \overline{FC}$ y como $\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$ entonces $\overline{FC} \cong \overline{B'C'}$; por otro lado, por el corolario 32,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{FC}, \quad \text{o sea} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (**)$$

de (*), (**)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'},$$

hemos mostrado que los tres pares de ángulos son congruentes y los tres pares de lados respectivos son proporcionales, por lo tanto

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \qquad \blacksquare$$

Se deja como ejercicio los siguientes corolarios.

Corolario 34 (Paralela a un lado de un triángulo). *Una paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al primero.*

Corolario 35. *Si dos triángulos rectángulos tienen un par de ángulos agudos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.*

Corolario 36. *Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o respectivamente perpendiculares, entonces los dos triángulos son semejantes.*

Corolario 37. *Las alturas y las bisectrices homólogas de dos triángulos semejantes están en la misma razón que sus lados homólogos.*

Corolario 38. *Dos triángulos isósceles son semejantes si tienen un par de ángulos congruentes.*

Corolario 39. *Todos los triángulos equiláteros son semejantes.*

Teorema 100 (Segundo criterio de semejanza: P-A-P).

Si un ángulo de un triángulo es congruente con otro ángulo de otro triángulo y los lados que comprenden al ángulo en el primer triángulo son respectivamente proporcionales a los lados que comprende al ángulo en el segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

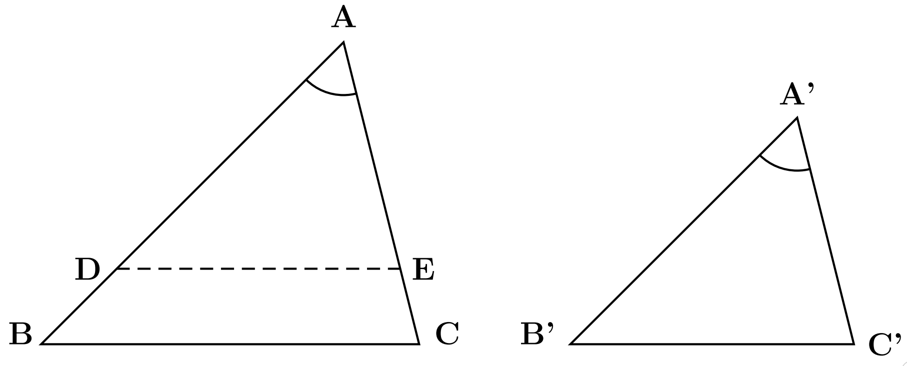


Figura 15.

Demostración. (Ver figura 15.) Tomemos por hipótesis que $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Veamos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Por el axioma de construcción de segmento, existen $D \in \overrightarrow{AB}$ y $E \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, por lo tanto, por el criterio L-A-L, $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$.
Por otro lado, como $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ entonces $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ y por el corolario 33 (recíproco del corolario 32),

$$\overline{DE} \| \overline{BC}$$

Por lo tanto, por el corolario 34, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ y por transitividad

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \qquad \blacksquare$$

Corolario 40. *Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son respectivamente proporcionales.*

Corolario 41. *Las medianas homólogas de dos triángulos semejantes, estan en la misma razón que sus lados homólogos.*

Teorema 101 (Tercer criterio de semejanza:P-P-P).

Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración. (Ver Figura 16.) Tomemos por hipótesis que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (*)$$

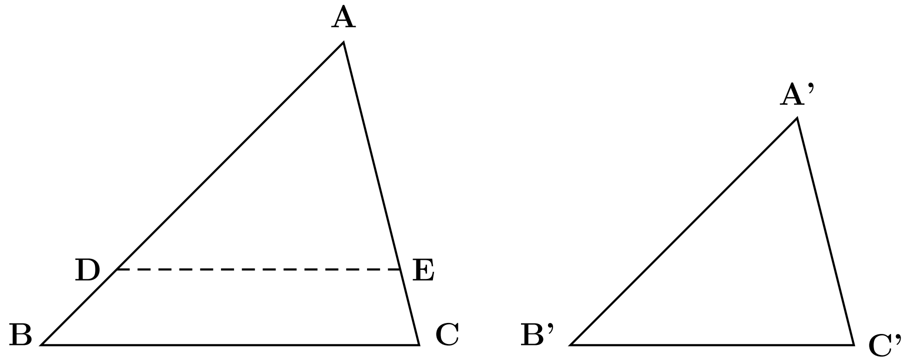


Figura 16.

Por el axioma de construcción de segmento, existen $D \in \overrightarrow{AB}$ y $E \in \overrightarrow{AC}$ tales que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{AE} \cong \overline{A'C'}$, sustituyendo en (*),

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

y por el corolario 33 (recíproco del corolario 32),

$$\overline{DE} \| \overline{BC}$$

Por lo tanto, por el corolario 34, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, de esta semejanza se concluye que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \quad \text{o sea que} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{DE} \quad (**),$$

pero por hipótesis

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad (***)$$

de (**) y (***) y por las propiedades de las fracciones: $DE = B'C'$ o sea que

$$\overline{DE} \cong \overline{B'C'}$$

y por lo tanto, por el tercer criterio de congruencia de triángulos L-L-L: $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ y como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, entonces por transitividad,

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'. \qquad \blacksquare$$

Corolario 42. *Si las bases de dos triángulos isósceles son entre si como sus otros lados, entonces los triángulos son semejantes.*

7.4. SEMEJANZA EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Los resultados de aplicar los conceptos de semejanza al triángulo rectángulo son de mucha importancia, pues obtendremos el teorema de Pitágoras y aplicaciones al triángulo y a los cuadriláteros, a las áreas, etc.

Definición 65. *a. La proyección ortogonal de un punto exterior a una recta, es el punto de intersección de una recta perpendicular desde el punto a la recta.*

b. La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta es el segmento determinado por las proyecciones ortogonales de los extremos del segmento sobre la recta.

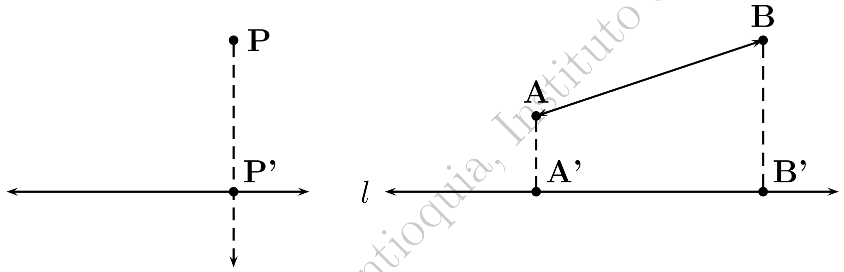


Figura 17.

En la Figura 17., la proyección ortogonal del punto P sobre la recta l es el punto P', ya que $l \perp \overrightarrow{PP'}$ y $\{P'\} = l \cap \overrightarrow{PP'}$.

La proyección ortogonal del segmento $\overline{AB}$ sobre la recta l es el segmento $\overline{A'B'}$, donde A' y B' son las proyecciones ortogonales sobre l de A y B respectivamente.

Teorema 102 (Proporcionalidad en el triángulo rectángulo).
Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, entonces:

a. *Los dos nuevos triángulos que resultan, son semejantes entre si y semejantes al triángulo original.*

b. *La altura es media proporcional entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.*

c. *Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.*

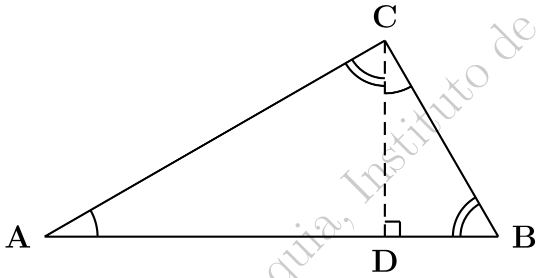


Figura 18.

Demostración. (Ver Figura 18.)

a. Sabemos por el corolario 35, que si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo congruente, entonces los dos triángulos son semejantes, por lo tanto
$$\triangle ADC \sim \triangle ABC, \quad \triangle CDB \sim \triangle ABC$$
y por transitividad
$$\triangle ADC \sim \triangle ABC \sim \triangle CDB$$

b. Como $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ y $\widehat{CAD} \cong \widehat{DCB}$ y $\widehat{ACD} \cong \widehat{CBD}$ entonces la relación entre los lados homólogos del $\triangle ADC$ con los lados homólogos del $\triangle CDB$ es
$$\frac{\triangle ADC}{\triangle CDB}: \quad \frac{AD}{CD} = \frac{AC}{CB} = \frac{DC}{DB}$$

luego $CD^2 = AD \cdot DB$ o sea que $\overline{CD}$ es media proporcional entre $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.

c. Como $\triangle ADC \sim \triangle ABC$ y $\widehat{ACD} \cong \widehat{CBA}$ y el ángulo $\widehat{A}$ es común, entonces la relación entre los lados homólogos del $\triangle ADC$ con los lados homólogos del $\triangle ABC$ es

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle ABC}: \quad \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{CB}$$

luego $AC^2 = AD \cdot AB$ o sea que $\overline{AC}$ es media proporcional entre $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$.
Como $\triangle CDB \sim \triangle ABC$, $\widehat{BCD} \cong \widehat{CAB}$ y el ángulo $\widehat{B}$ es común, se demuestra en forma similar que

$$CB^2 = AB \cdot DB$$

o sea que $\overline{CB}$ es media proporcional entre $\overline{AB}$ y $\overline{DB}$. ■

Teorema 103 (Teorema de Pitágoras).

El cuadrado de la medida de la hipotenusa en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

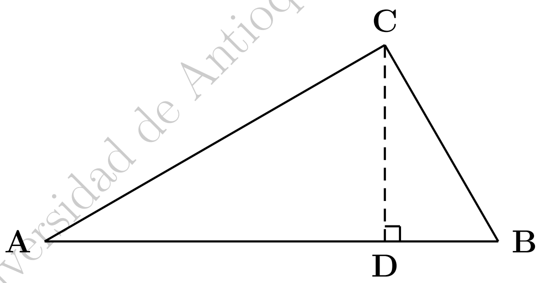


Figura 19.

Demostración. (Ver Figura 19.) Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en C y sea $\overline{CD}$ la altura relativa a la hipotenusa, entonces por la parte c. del anterior teorema:

$$AC^2 = AD \cdot AB, \qquad CB^2 = AB \cdot DB$$

y sumando estas dos expresiones, tenemos

$$AC^2 + CB^2 = AD \cdot AB + AB \cdot DB = AB(AD + DB) = AB \cdot AB = AB^2$$ ■

Teorema 104 (Recíproco del teorema de Pitágoras).

Si en un triángulo el cuadrado de la medida de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.

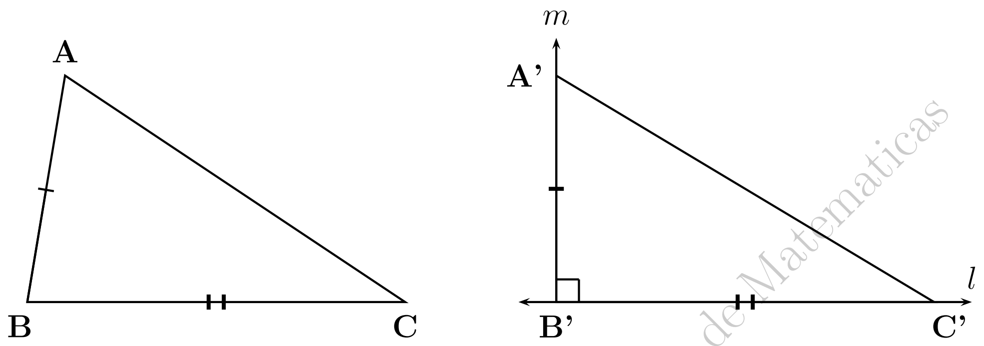


Figura 20.

Demostración. (Ver Figura 20.) Sea el $\triangle ABC$ tal que $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Veamos que el $\triangle ABC$ es rectángulo en B. Para ello, construyamos un triángulo $\triangle A'B'C'$ rectángulo en B', así : en una recta l fijo un punto B', por el axioma de construcción de segmento, existe un punto C' en una de las semirrectas determinadas por B' en l, tal que $\overline{B'C'} \cong \overline{BC}$; por el teorema de la perpendicular por un punto de una recta, por B' pasa $m \perp l$, por el axioma de construcción de segmento, existe un punto A' en una de las semirrectas determinadas por B' en m, tal que $\overline{B'A'} \cong \overline{BA}$, por lo tanto el $\triangle A'B'C'$ es rectángulo en B'. Por el teorema de Pitágoras

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2.$$

Pero por hipótesis $AC^2 = AB^2 + BC^2$, luego $A'C'^2 = AC^2$ y por tanto

$$A'C' = AC$$

En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ se tiene:

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}, \qquad \overline{AB} = \overline{A'B'}, \qquad \overline{BC} = \overline{B'}C'$$

luego, por el criterio L-L-L, se tiene que

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

luego $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ y como $\widehat{A'B'C'}$ es recto, entonces $\triangle ABC$ es rectángulo en B. ■

7.5. APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Con los siguientes teoremas se demuestra la ley de cosenos en trigonometría.

Teorema 105 (Ley de cosenos).

a. *En un triángulo obtusángulo, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, más el doble producto de la medida de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

b. *En un triángulo cualquiera, el cuadrado de la medida del lado opuesto al ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, menos el doble producto de la medida de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.*

Demostración. a.) (Ver Figura 21.(a)) Supongamos que en el $\triangle ABC$ el ángulo $\widehat{ABC}$ es obtuso y sea $\overline{BH}$ la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ y sea $\overline{BH_1}$ la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overleftrightarrow{AB}$, por el Teorema 36, $H-B-C$ y $A-B-H_1$; veamos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot BH \quad \text{y} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BH_1$$

Demostremos la primera expresión, la otra se hace en forma similar.
Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHB$ se tiene

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \quad (*)$$

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHC$ se tiene

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (**)$$

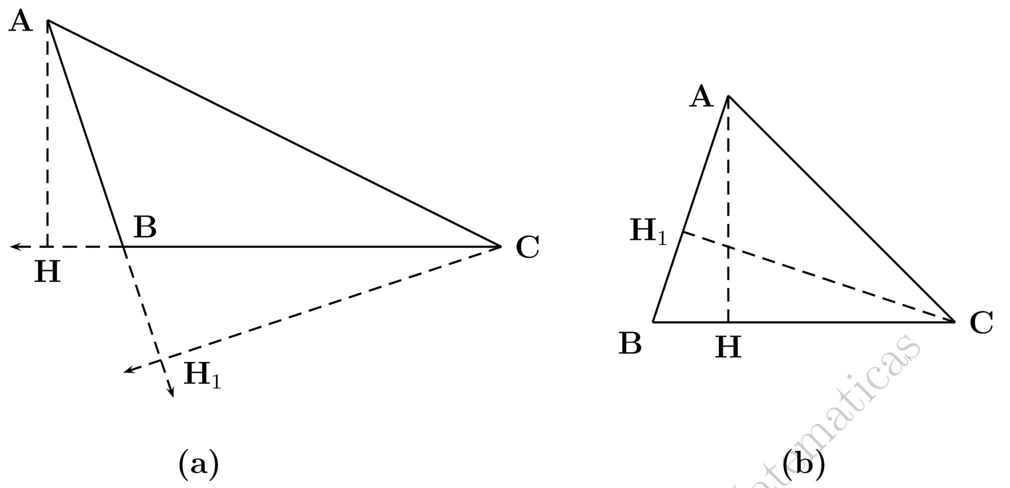


Figura 21.

restando (**) y (*): $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2 \quad (***)$, pero como $H-B-C$, entonces $HC = HB + BC$ y sustituyendo en (***) y despejando

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + (HB + BC)^2 - HB^2 \\ &= AB^2 + HB^2 + BC^2 + 2 \cdot HB \cdot BC - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot HB \end{aligned}$$

b.) (Ver Figura 21.(b)). Supongamos que en el $\triangle ABC$ el ángulo $\widehat{ABC}$ es agudo y sea $\overline{BH}$ la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ y sea $\overline{BH_1}$ la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overleftrightarrow{AB}$, por el Teorema 36, $B-H-C$ y $B-H_1-A$; veamos que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot BH \quad \text{y} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BH_1$$

Demostremos la primera expresión, la otra se hace en forma similar.
Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHB$ se tiene

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \quad (*)$$

Por el teorema de Pitágoras en el $\triangle AHC$ se tiene

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \quad (**)$$

restando (**) y (*): $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2 \quad (***)$, pero como $B-H-C$, entonces $HC = BC - HB$ y sustituyendo en (***) y despejando

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + (BC - HB)^2 - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + HB^2 - 2 \cdot BC \cdot HB - HB^2 \\ &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot HB \end{aligned}$$ ■

Teorema 106 (Teorema de Stewart).

En el $\triangle ABC$, $D \in Int\overline{BC}$. Si $BD = m$, $DC = n$, $AD = d$, entonces

$$d^2 a = b^2 m + c^2 n - amn$$

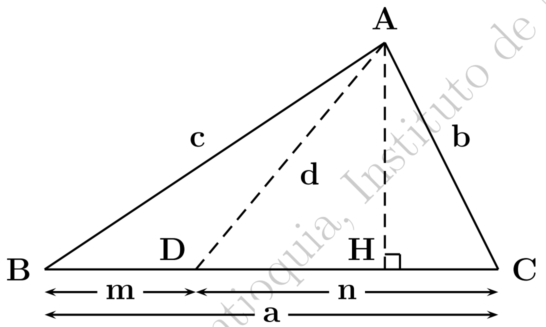


Figura 22.

Demostración. (Ver Figura 22.) Sea $D \in \overline{BC}$ en el $\triangle ABC$, sea $\overline{DH}$ la proyección de $\overline{AD}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$; con el $\widehat{ADB}$ pueden suceder tres casos: i. que sea obtuso, ii. que sea recto, iii. que sea agudo.
Mostremos el primer caso, los otros casos son similares.
Como $\widehat{ADB}$ es obtuso, entonces por el Teorema 36 $B - D - H$ y $\widehat{ADC}$ es agudo y $BD + DC = BC$; por el teorema anterior (ley de cosenos) en el $\triangle ADB$ y en el $\triangle ADC$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2 \cdot BD \cdot DH \quad (*)$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot DH \quad (**)$$

multiplicando (*) por DC y (**) por BD y luego sumando:

$$\begin{aligned} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD &= AD^2 \cdot (DC + BD) + BD^2 \cdot DC + DC^2 \cdot BD \\ &= AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC(DC + BD) \\ &= AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC \end{aligned}$$

luego $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC$ es decir,

$$d^2a = b^2m + c^2n - amn. \qquad \blacksquare$$

Teorema 107.

a.) La suma de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la medida de la mediana del tercer lado más la mitad del cuadrado de la medida del tercer lado.
b.) La diferencia de los cuadrados de las medidas de dos lados de un triángulo es igual a dos veces el producto de la medida del tercer lado por la proyección de la mediana correspondiente a este lado.

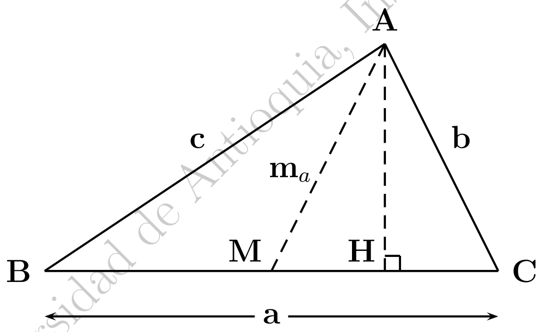


Figura 23.

Demostración. (Ver Figura 23.) En el $\triangle ABC$, sea M el punto medio de $\overline{BC}$, m_a la mediana relativa al lado $\overline{BC}$ y $\overline{MH}$ la proyección de la mediana $AM = m_a$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$, supongamos que $\overline{AB} > \overline{AC}$. Con el ángulo $\widehat{AMB}$ pueden suceder tres casos: i. es obtuso, ii. es recto, iii. es agudo.
Tomemos el caso i. y veamos que
a.) $c^2 + b^2 = 2 \cdot m_a^2 + \frac{1}{2}a^2$
b.) $c^2 - b^2 = 2 \cdot a \cdot MH$.

En efecto, como $\widehat{AMB}$ es obtuso entonces $\widehat{AMC}$ es agudo, luego por el teorema de la ley de cosenos en el $\triangle AMB$ y en el $\triangle AMC$:

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2 \cdot BM \cdot MH \quad (*)$$

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2 \cdot MC \cdot MH \quad (**)$$

sumando (*) y (**) y teniendo en cuenta que M es punto medio, o sea que $MB = MC$, entonces

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2 \cdot AM^2 + BM^2 + MC^2 \\ &= 2 \cdot AM^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \\ &= 2 \cdot AM^2 + 2\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2 \cdot AM^2 + \frac{1}{2}BC^2 \\ c^2 + b^2 &= 2 \cdot m_a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \end{aligned}$$

restando (*) y (**) y teniendo en cuenta que M es punto medio, o sea que $MB = MC$,:

$$\begin{aligned} AB^2 - AC^2 &= 4 \cdot MB \cdot MH \\ &= 4\left(\frac{BC}{2}\right) \cdot MH = 2 \cdot BC \cdot MH \\ c^2 - b^2 &= 2 \cdot a \cdot MH \end{aligned}$$ ■

Teorema 108 (Altura en función de los lados).

En un $\triangle ABC$ cuyos lados miden: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; las alturas miden:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$ =semi-perímetro.

Demostración. (Ver Figura 24.)Sea $h_a = AH$ la altura relativa al lado $\overline{BC}$, con H pueden ocurrir los siguientes casos i. $B - H - C$, ii. $B - C - H$ o

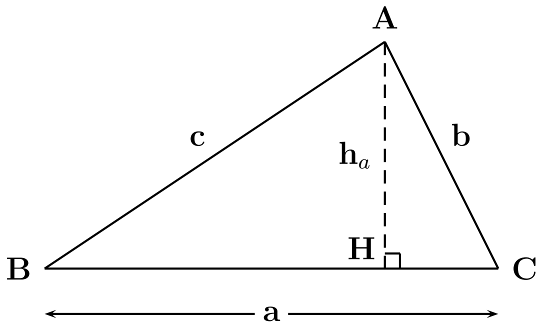


Figura 24.

$H - B - C$, iii. $H \equiv B$ o $H \equiv C$.
Mostremos el caso i. y supongamos que $c > b$ (ver la Figura 24.), el caso $c < b$ es similar, el caso $c = b$ se deja como ejercicio; como los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle AHC$ son rectángulos, entonces por el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = h_a^2 + BH^2 \tag{7.1}$$
$$b^2 = h_a^2 + CH^2 \tag{7.2}$$

Como $B - H - C$ entonces $HC = a - BH$, sustituyendo en 7.2

$$b^2 = h_a^2 + (a - BH)^2 = h_a^2 + a^2 + BH^2 - 2aBH \tag{7.3}$$

y por 7.1 en la expresión anterior

$$b^2 = h_a^2 + a^2 + c^2 - h_a^2 - 2aBH = a^2 + c^2 - 2aBH$$

como $a \neq 0$, ya que A, B, C son tres puntos distintos no colineales, despejando BH en la expresión anterior

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

y sustituyendo en 7.1

$$c^2 = h_a^2 + \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

despejando h_a^2

$$\begin{aligned}
h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2 &= c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2} \\
&= \frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2} = \frac{((a+c)^2-b^2)(b^2-(a-c)^2)}{4a^2} \\
&= \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2} \qquad (7.4)
\end{aligned}$$

Como $p = \frac{a+b+c}{2}$ entonces $a+b+c = 2p$ y también

$$p - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{a+b+c-2a}{2a} = \frac{b+c-a}{2}$$

por lo tanto $b+c-a = 2(p-a)$
Similarmente $a+b-c = 2(p-c)$ y $a+c-b = 2(p-b)$, sustituyendo en 7.4

$$h_a^2 = \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4a^2} = \frac{4}{a^2}\cdot p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)$$

por lo tanto

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}. \qquad \blacksquare$$

7.5.1. CONSTRUCCIONES BÁSICAS

1. Dividir un segmento en n segmentos congruentes, con n entero positivo.

   Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 25.).

   - Por A trazo una semirrecta $\overrightarrow{AX}$ cualesquiera, tal que A, B y X sean tres puntos distintos no colineales.
   - Con centro en A y radio cualesquiera, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AX}$ en A_1.
   - Con centro en A_1 y el mismo radio, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AX}$ en A_2 de tal manera que $A - A_1 - A_2$; similarmente se hallan los puntos $A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$.

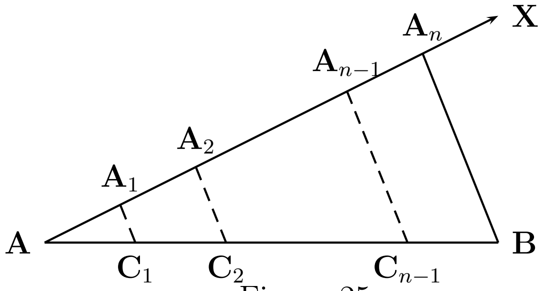


Figura 25.

- Uno A_n con B y por $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_2, A_1$ trazo paralelas a $\overline{A_nB}$ las cuales cortan a $\overline{AB}$ en $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_2, C_1$.
- $\overline{AC_1} \cong \overline{C_1C_2} \cong \cdots \cong \overline{C_{n-1}B}$

Justificación. Como

$$\overline{AA_1} \cong \overline{A_1A_2} \cong \cdots \cong \overline{A_{n-1}A_n}$$

y

$$\overline{BA_n} \parallel \overline{C_{n-1}A_{n-1}} \parallel \cdots \parallel \overline{C_1A_1}$$

entonces por el Teorema fundamental del paralelismo (Lema 1),

$$\overline{AC_1} \cong \overline{C_1C_2} \cong \cdots \cong \overline{C_{n-1}B}$$

2. Dividir un segmento dado en una proporción dada $\frac{p}{q}$, donde p, q son enteros positivos.

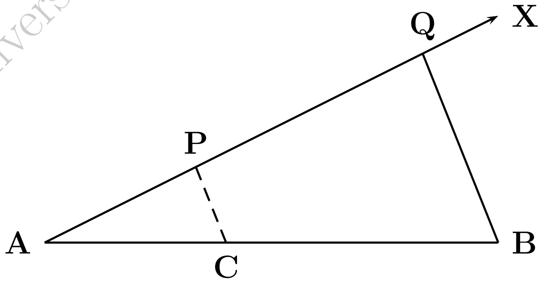


Figura 26.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 26.).

- Por A trazo una semirrecta $\overrightarrow{AX}$ cualesquiera, tal que A, B y X sean tres puntos distintos no colineales.
- Con centro en A y radio cualesquiera, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AX}$ en A_1, este procedimiento lo efectúo p veces hasta completar un segmento $\overline{AP}$ de longitud pAA_1, a continuación de este segmento y utilizando la misma medida AA_1 construyo el segmento $\overline{PQ}$ de longitud qAA_1 .
- Uno Q con B y por P trazo paralela a $\overline{QB}$ la cual corta a $\overline{AB}$ en C .
- el punto C es el punto pedido.

Justificación. Como $\overline{QB} \parallel \overline{PC}$, entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo)

$$\frac{CA}{CB} = \frac{pAA_1}{qAA_1} = \frac{p}{q}$$

3. Hallar la cuarta proporcional de tres segmentos dados: a, b, c.

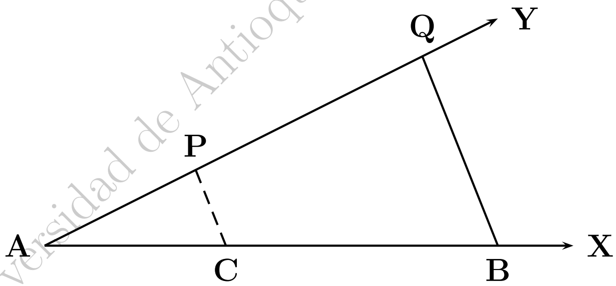


Figura 27.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 27.).

- Trazo una semirrecta $\overrightarrow{AX}$ cualesquiera,
- Trazo una semirrecta $\overrightarrow{AY}$ cualesquiera, que no este contenida en la recta $\overleftrightarrow{AX}$
- Con centro en A y radio a, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AY}$ en P.

- Con centro en P y radio b, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AY}$ en Q, tal que $A - P - Q$.
- Con centro en A y radio c, trazo arco que corta a $\overrightarrow{AX}$ en C.
- Uno P con C y por Q trazo paralela a $\overline{PC}$ la cual corta a $\overrightarrow{AX}$ en B .
- el segmento $\overline{CB}$ es el segmento pedido.

Justificación. Como $\overline{PC} \parallel \overline{QB}$, entonces por el Corolario 31 (Teorema de Tales en el triángulo)

$$\frac{AP}{PQ} = \frac{AC}{CB} \quad \text{o sea} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{CB}$$

4. Dado $C \in \overline{AB}$, hallar el conjugado armónico de C con respecto a $\overline{AB}$.

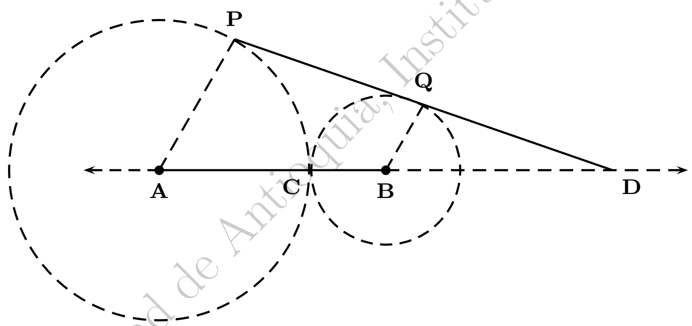


Figura 28.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 28.).

- Trazo circunferencia de centro A y radio AC.
- Trazo circunferencia de centro B y radio BC.
- En la circunferencia $C(A, AC)$, trazo un radio cualesquiera AP no paralelo a $\overline{AB}$.
- Por B trazo, en la circunferencia $C(B, BC)$, el radio BQ tal que $\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$

- Uno P con Q y prolongo hasta cortar la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en D .
- el punto D es el conjugado de C con respecto a $\overline{AB}$.

Justificación. Como $\overline{BQ} \parallel \overline{AP}$ entonces $\triangle ADP \sim \triangle BDQ$ entonces, teniendo en cuenta que AP y BQ son radios en las respectivas circunferencias,

$$\frac{AP}{BQ} = \frac{DA}{DB} \quad \text{o sea} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

5. Dado $\overline{AB}$ y dada la proporción $\frac{p}{q}$, donde p, q son enteros positivos. Hallar C, D conjugados armónicos de $\overline{AB}$ tal $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{p}{q}$.

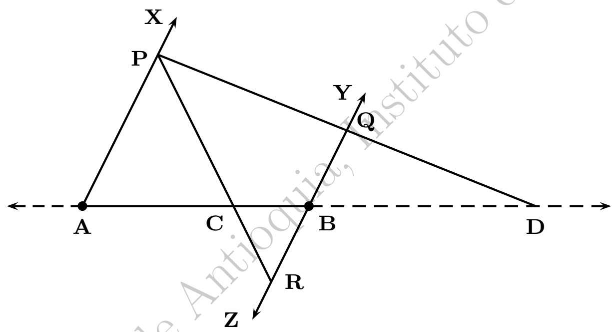


Figura 29.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 29.).

- Trazo una semirrecta cualquiera $\overrightarrow{AX}$ que no este contenida en $\overleftrightarrow{AB}$.
- En el mismo semiplano, trazo la semirrecta $\overrightarrow{BY}$ tal que $\overrightarrow{BY} \parallel \overrightarrow{AX}$ y trazo también la semirrecta $\overrightarrow{BZ}$ opuesta a la semirrecta $\overrightarrow{BY}$.
- Sobre la semirrecta $\overrightarrow{AX}$ y con la misma unidad de medida α, trazo el segmento $\overline{AP}$ tal que $AP = p \cdot \alpha$.
- Sobre la semirrecta $\overrightarrow{BY}$ y con la misma unidad de medida α, trazo el segmento $\overline{BQ}$ tal que $BQ = q \cdot \alpha$.

- Sobre la semirrecta $\overrightarrow{BZ}$ y con la misma unidad de medida α, trazo el segmento $\overline{BR}$ tal que $BR = q \cdot \alpha$.
- Uno P con Q y prolongo hasta cortar la recta $\overleftrightarrow{AB}$ en D .
- Uno P con R el cual corta a $\overline{AB}$ en C .
- Los puntos C y D son conjugados armónicos con respecto a $\overline{AB}$ bajo la razón $\frac{p}{q}$.

Justificación. Como $\overline{AX} \parallel \overline{YZ}$ entonces

$$\triangle APD \sim \triangle BQD \quad \text{y} \quad \triangle APC \sim \triangle BRC$$

entonces,

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AP}{BQ} \quad \text{o sea} \quad \frac{DA}{DB} = \frac{p \cdot \alpha}{q \cdot \alpha} = \frac{p}{q}$$

y también

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AP}{BR} \quad \text{o sea} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{p \cdot \alpha}{q \cdot \alpha} = \frac{p}{q}$$

luego

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

6. Hallar la media proporcional de dos segmentos a y b dados.

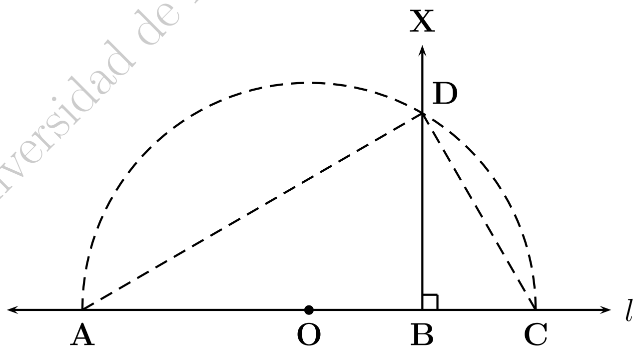


Figura 30.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 30.).

- Sobre una recta l fijo un punto A.

- Con centro en A y radio a trazo arco que corta a l en B.
- Con centro en B y radio b trazo arco que corta a l en C, tal que $A - B - C$.
- Por B trazo $\overrightarrow{BX} \perp l$.
- Hallo O punto medio de $\overline{AC}$.
- Trazo semicircunferencia de centro O y radio OA, la cual corta a $\overrightarrow{BX}$ en D.
- El segmento $\overline{BD}$ es media proporcional entre a y b.

Justificación. Como $\overline{AC}$ es diámetro, entonces $\triangle ACD$ es rectángulo y como $\overline{DB}$ es altura relativa a la hipotenusa en dicho triángulo, entonces, por el Teorema 102 (Proporcionalidad en el triángulo rectángulo)

$$BD^2 = BA \cdot BC = a \cdot b$$

es decir BD es media proporcional entre a y b.

7.6. APLICACIONES DE LA SEMEJANZA A LA CIRCUNFERENCIA

Teorema 109 (Teorema de Tolomeo).

En un cuadrilátero cíclico, el producto de las medidas de las diagonales es igual a la suma de los productos de las medidas de los lados opuestos.

Demostración. (Ver Figura 31.) Por el axioma de construcción de ángulo, existe una semirrecta $\overrightarrow{AF} \subset \pi_{\overleftrightarrow{AB}:\, C}$ con F sobre la circunferencia, tal que $\widehat{DAC} \cong \widehat{BAF}$, sea $\{E\} = \overline{AF} \cap \overline{DB}$ y como $\widehat{CAF} \cong \widehat{CAF}$ entonces por el axioma de suma (o resta) de ángulos congruentes, $\widehat{DAF} \cong \widehat{BAC}$
En los $\triangle ADC$ y $\triangle AEB$ se tiene: $\widehat{DAC} \cong \widehat{BAF}$ y $\widehat{DCA} \cong \widehat{ABE}$ (por Teorema del ángulo inscrito), entonces por el criterio A-A:

$$\triangle ADC \sim \triangle AEB$$

luego

$$\frac{\triangle ADC}{\triangle AEB} : \quad \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{EB}$$

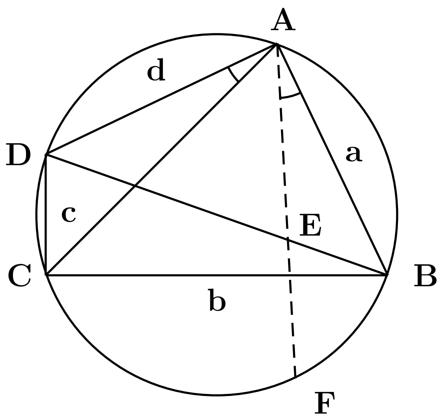


Figura 31.

luego

$$AC \cdot EB = DC \cdot AB \quad (*)$$

En los $\triangle DAE$ y $\triangle ABC$ se tiene: $\widehat{DAE} \cong \widehat{BAC}$ y $\widehat{ADE} \cong \widehat{ACB}$ (por Teorema del ángulo inscrito), entonces por el criterio A-A:

$$\triangle DAE \sim \triangle ABC$$

luego

$$\frac{\triangle DAE}{\triangle ABC}: \quad \frac{DA}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AB}$$

luego

$$DA \cdot BC = DE \cdot AC \quad (**)$$

sumando (*) y (**):

$$DC \cdot AB + DA \cdot BC = AC \cdot EB + DE \cdot AC = AC(EB + DE) = AC \cdot BD$$

es decir,

$$AC \cdot BD = a \cdot c + b \cdot d. \qquad \blacksquare$$

Teorema 110.

Si dos cuerdas se interceptan en el interior de una circunferencia entonces el producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto de intersección en una de las cuerdas es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados en la otra cuerda.

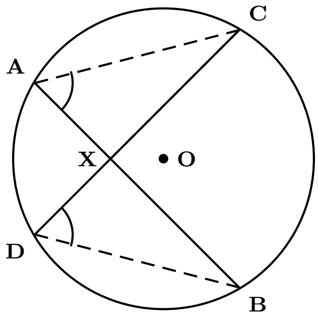


Figura 32.

Demostración. (Ver Figura 32.) Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ cuerdas tales que $\{X\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y $A - X - B$ y $C - X - D$. En los $\triangle AXC$ y $\triangle BXD$ se tiene que: por opuestos por el vértice $\widehat{AXC} \cong \widehat{BXD}$ y por el Teorema del ángulo inscrito $\widehat{CAX} \cong \widehat{XDB}$, luego por el criterio A-A,

$$\triangle AXC \cong \triangle BXD$$

luego

$$\frac{\triangle AXC}{\triangle BXD} : \frac{XA}{XD} = \frac{AC}{BD} = \frac{XC}{XB}$$

o sea que $XA \cdot XB = XC \cdot XD$

Nota: 1.) Obsérvese que si por ejemplo el punto $X \equiv A \equiv C$, es decir, los dos segmentos se cortan sobre la circunferencia, entonces también se cumple que $XA \cdot XB = XC \cdot XD = 0$.

2.) El resultado de este teorema nos muestra que para cualquier cuerda que pase por el punto X se cumple que $XA \cdot XB$ permanece constante o sea que este producto no depende de la cuerda, sino del punto X. ■

El siguiente teorema se deja como ejercicio, es el recíproco del teorema anterior.

Teorema 111.

Si dos segmentos se interceptan en un punto que esta en el interior de los dos segmentos y el producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto de intersección en el primer segmento es igual al producto de las medidas de los segmentos determinados por el punto en el segundo segmento, entonces los extremos de los segmentos están sobre una circunferencia.

Teorema 112.

Si desde un punto X exterior a una circunferencia se trazan dos semirrectas secantes $\overline{l}$ y $\overline{m}$ que cortan a la circunferencia en A, B y C, D respectivamente, entonces

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

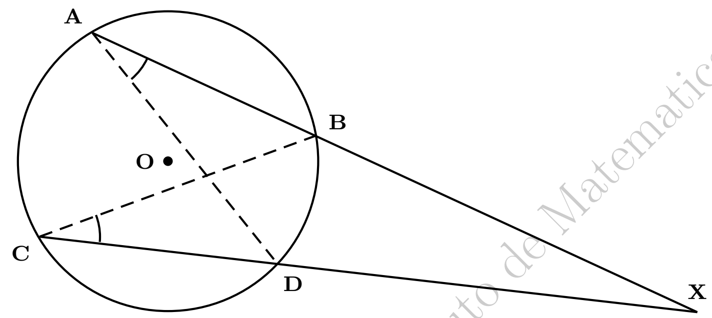


Figura 33.

Demostración. (Ver Figura 33.) Por el Teorema del ángulo inscrito $\widehat{BAD} \cong \widehat{BCD}$ y el $\widehat{X}$ es común para los $\triangle XAD$ y $\triangle XBC$ entonces por el criterio A-A

$$\triangle XAD \sim \triangle XBC$$

luego

$$\frac{\triangle XAD}{\triangle XBC} : \quad \frac{XA}{XC} = \frac{XD}{XB} = \frac{AD}{BC}$$

luego

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

Nota: El resultado de este teorema nos muestra que para cualquier semirrecta que pase por el punto X se cumple que $XA \cdot XB$ permanece constante o sea que este producto no depende de la semirrecta, sino del punto X. ■

El recíproco del anterior teorema también es cierto, se deja como ejercicio.

Teorema 113 (Recíproco).

Si desde un punto X se trazan dos semirrectas $\bar{l}$ y $\overline{m}$ y A, B son puntos de $\bar{l}$ y C, D son puntos de $\overline{m}$, tales que

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD,$$

entonces los puntos A, B, C, D están sobre una circunferencia.

Teorema 114.

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos semirrectas, una tangente y la otra secante, entonces el segmento entre el punto y el punto de tangencia es media proporcional entre los segmentos determinados entre el punto exterior y los puntos de intersección de la secante con la circunferencia.

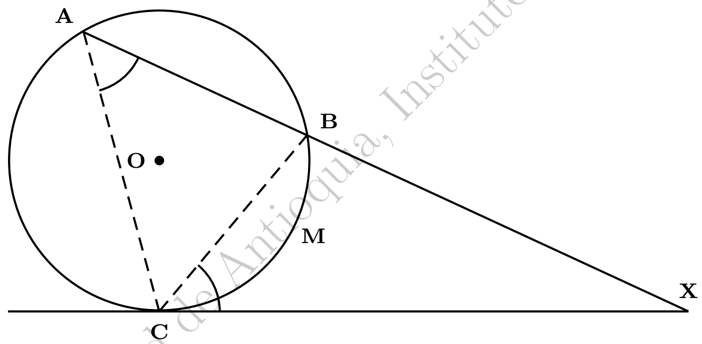


Figura 34.

Demostración. (Ver Figura 34.) Como por el teorema del ángulo semi-inscrito el $\widehat{BCX} = \frac{1}{2}C\overset{\frown}{M}B$ y $\widehat{X}$ es común para los $\triangle XAC$ y $\triangle XBC$, entonces por el criterio A-A,

$$\triangle XAC \sim \triangle XBC,$$

luego

$$\frac{\triangle XAC}{\triangle XBC}: \quad \frac{XA}{XC} = \frac{XC}{XB} = \frac{AC}{BC}$$

luego

$$XA \cdot XB = XC \cdot XC = XC^2. \qquad \blacksquare$$

7.7. EJE RADICAL Y SUS PROPIEDADES

Definición 66 (Potencia de un punto con respecto a una circunferencia). *La potencia de un punto X con respecto a una circunferencia $C(O, r)$ es el producto $XA \cdot XB$, donde A y B son los puntos de intersección de la circunferencia con una recta que pasa por X.*

Notación: la potencia del punto X con respecto a la circunferencia $C(O, r)$ se denota por $p_{X;O}$, es decir,

$$p_{X;O} = XA \cdot XB$$

Nota a.) De acuerdo a los teoremas 110 y 112, todas las rectas que pasan por el punto X tienen igual potencia, por lo tanto, la potencia depende solamente del punto y la circunferencia.
b.) Si X es un punto exterior a la $C(O, r)$ y d es la distancia del punto X al centro O de la circunferencia, entonces (ver la Figura 35.)

$$p_{X;O} = XA \cdot XB = (XO + OA)(XO - OB) = (d + r)(d - r) = d^2 - r^2$$

donde A, B son los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{XO}$ con la $C(O, r)$. En este caso $p_{X;O} > 0$, ya que $d > r$

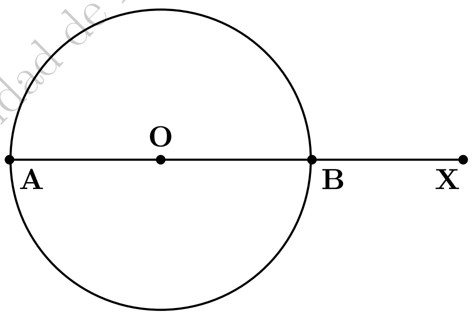


Figura 35.

c.) Con el punto X y la circunferencia $C(O, r)$ pueden suceder tres casos:
1. $X \in ExtC(O, r)$, en este caso vimos que $p_{X;O} > 0$, ya que $d > r$
2. $X \in IntC(O, r)$, en este caso $p_{X;O} = d^2 - r^2 < 0$, ya que $d < r$

3. $X \in C(O, r)$, en este caso $p_{X;O} = d^2 - r^2 = 0$, ya que $d = r$

En resumen, la potencia es positiva en el exterior de la circunferencia, negativa en el interior de la circunferencia y es cero cuando el punto esta sobre la circunferencia.

d.) Si $X \equiv O$, entonces $d = 0$ y por tanto $p_{X;O} = d^2 - r^2 = -r^2$, este es el valor mínimo de la potencia, ya que $d = 0$ es el valor mínimo de d.

e.) Por el teorema 114, la potencia de un punto exterior a una circunferencia es igual al cuadrado de la medida del segmento tangente desde el punto X a la circunferencia $C(O, r)$, es decir, $p_{X;O} = XT^2$, donde T es el punto de tangencia.

f.) La potencia de un punto interior a una circunferencia es negativa e igual al cuadrado de la semi-cuerda perpendicular al diámetro que pasa por el punto.

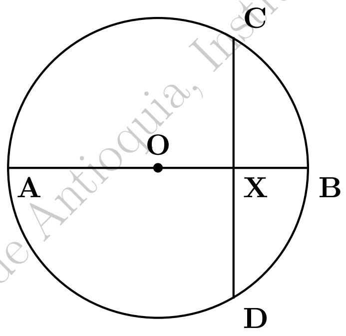


Figura 36.

(Ver Figura 36.) En efecto, sea $\overline{AB}$ diámetro y $X \in \overline{AB}$ y sea $\overline{CD}$ una cuerda tal que $\overline{CD} \cap \overline{AB} = \{X\}$ y $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, por tanto X es punto medio de $\overline{CD}$, entonces

$$p_{X;O} = -XA \cdot XB = -XC \cdot XD = -XC^2 = -XD^2 = -\left(\frac{CD}{2}\right)^2$$

Teorema 115 (Teorema del eje radical).

El lugar geométrico de los puntos de igual potencia con respecto a dos circunferencias no concéntricas, es una recta perpendicular a la recta que pasa por los centros.

Demostración. (Ver Figura 37.) Sean las circunferencias $C(O,r)$ y $C(O',r')$, sea M el punto medio de $\overline{OO'}$ y sea X un punto tal que $p_{X;O} = p_{X;O'}$ $(*)$, sea H la **proyección** de X sobre $\overleftrightarrow{OO'}$, veamos que cualquiera que sea el punto X con la propiedad (*), tendrá como proyección sobre $\overleftrightarrow{OO'}$ el punto H.

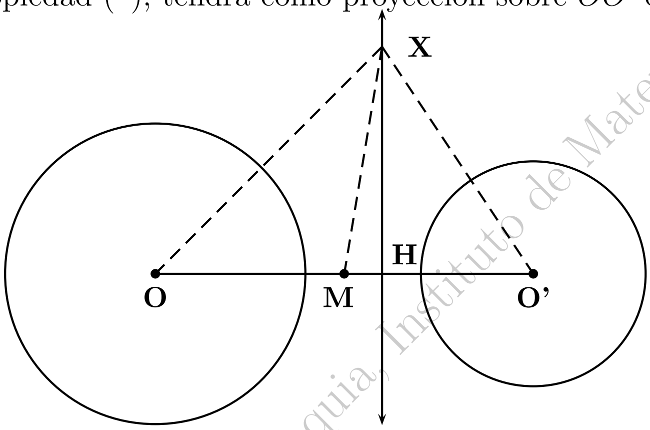


Figura 37.

En efecto, por la hipótesis, por la propiedad b.) hecha en la nota anterior y por el Teorema 107 b), se tiene

$$\begin{aligned}
p_{X;O} &= p_{X;O'} \\
(XO)^2 - (r)^2 &= (XO')^2 - (r')^2 \quad \text{por la propiedad b)} \\
(XO)^2 - (XO')^2 &= (r)^2 - (r')^2 \\
2 \cdot OO' \cdot MH &= (r)^2 - (r')^2 \quad \text{por el Teorema 107 b)} \\
\text{luego} \quad MH &= \frac{(r)^2 - (r')^2}{2 \cdot OO'}
\end{aligned}$$

como r, r', OO' son constantes y $OO' \neq 0$, entonces MH es constante y como M es fijo entonces H es fijo, cualquiera sea el punto X, por lo tanto los puntos X que cumplen con la propiedad (*) están sobre una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OO'}$. ■

La recta cuya existencia esta garantizada por el anterior teorema, le damos el siguiente nombre:

Definición 67 (Eje Radical). *La recta cuyos puntos tienen igual potencia con respecto a dos circunferencias, se le llama Eje Radical.*

Propiedades del Eje Radical.

1. Si las dos circunferencias se interceptan, entonces el eje radical pasa por los puntos de intersección, ya que cada punto de intersección tiene potencia igual a cero con respecto a las dos circunferencias.

2. Si las dos circunferencias son tangentes, entonces el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias, ya que la potencia en el punto de tangencia es cero con respecto a las dos circunferencias y la tangente común es perpendicular a la recta que pasa por los centros de las dos circunferencias.

3. Si las dos circunferencias son concéntricas y distintas, entonces no hay eje radical, ya que $d^2 - r^2 \neq (d')^2 - (r')^2$

Teorema 116 (Propiedades del Eje Radical).

a.) Las tangentes desde un punto del Eje Radical a las dos circunferencias, son congruentes.

b.) Los Ejes Radicales de tres circunferencias, cuyos centros son no colineales, tomados de dos en dos, son concurrentes, (este punto de concurrencia se le llama Centro Radical).

Demostración. a.) (ver Figura 38.) Sea X un punto del Eje Radical y sean $\overline{XT}$ y $\overline{XT_1}$ tangentes a las circunferencias $C(O,r)$ y $C(O',r')$ en T y T_1 respectivamente, entonces por el Teorema 114 $p_{X;O} = XT^2$ y $p_{X;O'} = XT_1^2$ y como X pertenece al Eje Radical, entonces $p_{X;O} = p_{X;O'}$ luego

$$XT^2 = XT_1^2$$

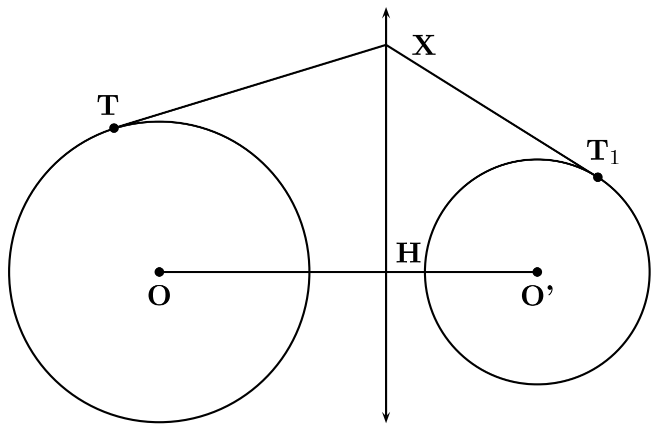


Figura 38.

luego $XT = XT_1$, o sea que $\overline{XT} \cong \overline{XT_1}$

b.)(ver Figura 39.) Sea l el Eje Radical de $C(O, r)$ y $C(O', r')$ y sea l' el Eje Radical de $C(O', r')$ y $C(O'', r'')$ por lo tanto $l \perp \overleftrightarrow{OO'}$ y $l' \perp \overleftrightarrow{O'O''}$.

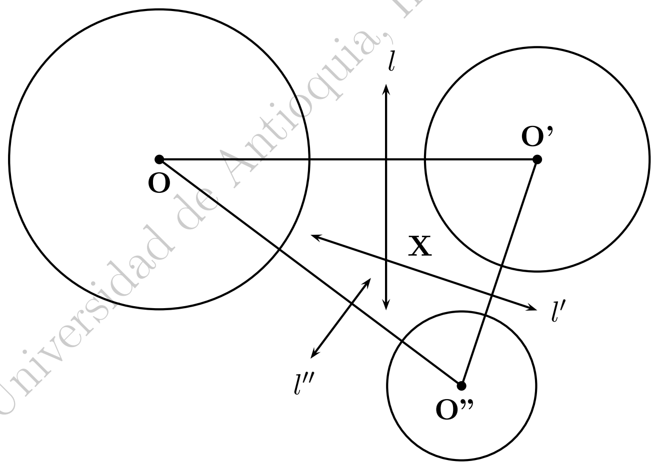


Figura 39.

Como O, O', O'' son no colineales, entonces l y l' se interceptan, sea

$$\{X\} = l \cap l'.$$

Veamos que $X \in l''$.
En efecto, como $X \in l$ entonces

$$p_{X;O} = p_{X;O'} \quad (*)$$

y como $X \in l'$ entonces

$$p_{X;O'} = p_{X;O''} \quad (**)$$

entonces de (*) y (**)

$$p_{X;O} = p_{X;O''}$$

luego $X \in l''$. ■

Observación.
De la parte b.) del teorema anterior se concluye que:
1. Si las tres circunferencias son secantes dos a dos, entonces las cuerdas comunes son concurrentes.

2. Si las tres circunferencias son tangentes dos a dos, entonces las tangentes comunes son concurrentes.

Con el Eje Radical se pueden hacer construcciones de circunferencias.

Ejemplo. Construir una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una recta dada.
Demos el problema por construido. Supongamos que los puntos dados son A, B y la recta dada es l, se presentan dos situaciones: a) $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, b) $\overleftrightarrow{AB} \cap l = \emptyset$.
a) Si $\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, sea $\{X\} = \overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \emptyset$, sea $C(O, r)$ la circunferencia buscada y sea $C(O', r')$ una circunferencia **cualesquiera** que pase por A y B, entonces $\overleftrightarrow{AB}$ es el Eje Radical de estas dos circunferencias, por lo tanto las tangentes desde el punto X a las dos circunferencias son congruentes; si $\overline{XT'}$ es la tangente a la $C(O', r')$ y $\overline{XT}$ es la tangente a la circunferencia buscada $C(O, r)$, entonces $XT = XT'$.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 40.).

- Uno A con B y prolongo hasta cortar l en X.

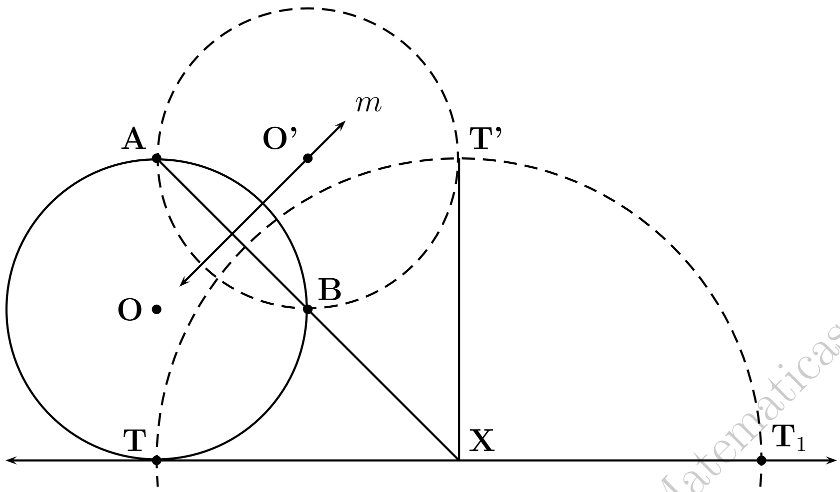


Figura 40.

- Trazo m la mediatriz de $\overline{AB}$.

- Por un punto cualesquiera O' de m, trazo una circunferencia que pase por A, B.

- Desde X trazo $\overline{XT'}$ tangente a la circunferencia de centro O'

- Con centro en X y radio XT' trazo arcos que cortan a l en T y T_1.

- Las circunferencias que pasan por A, B, T y por A, B, T_1 son las circunferencias pedidas (dos soluciones).

b) Si $\overleftrightarrow{AB} \cap l = \emptyset$, luego $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$. Sea $C(O, r)$ la circunferencia buscada y sea T el punto de tangencia entre la $C(O, r)$ y l, por lo tanto $\overline{OT} \perp l$, pero como $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$, entonces $\overleftrightarrow{OT} \perp \overline{AB}$, luego $\overleftrightarrow{OT}$ es mediatriz de $\overline{AB}$

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

- Uno A con B .

- Trazo m la mediatriz de $\overline{AB}$ que corta a l en T.

- Trazo circunferencia que pasa por A, B, T, que es la circunferencia pedida.

Ejemplo. Construir una circunferencia que pase por dos puntos y sea tangente a una circunferencia dada.
Demos el problema por construido. Supongamos que los puntos dados son A, B y la circunferencia dada es $C(O', r')$ y sea m la mediatriz de $\overline{AB}$, se presentan dos casos: a) $O' \notin m$, b) $O' \in m$

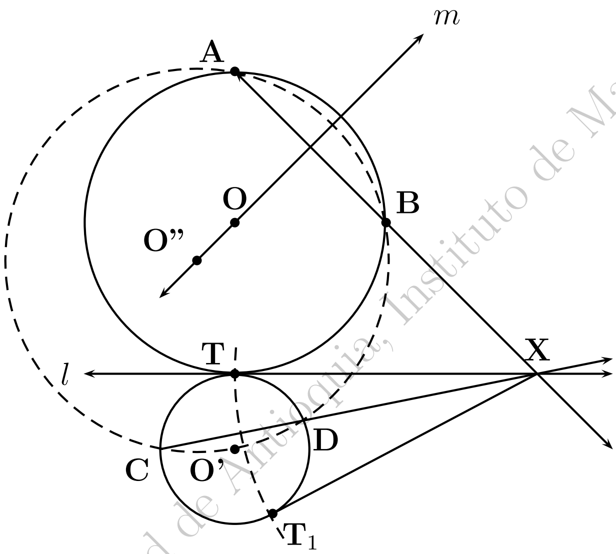


Figura 41.

a) $O' \notin m$, sea $C(O'', r'')$ una circunferencia que pase por A, B e intercepte a la circunferencia dada $C(O', r')$ en los puntos C, D, por lo tanto $\overleftrightarrow{CD}$ es el Eje Radical de estas dos circunferencias, como la circunferencia buscada $C(O, r)$ y la circunferencia dada $C(O', r')$ son tangentes, entonces la tangente l común a estas dos circunferencias es el Eje Radical de ambas y como $O' \notin m$, entonces l y $\overleftrightarrow{CD}$ se interceptan en un punto X; como los Ejes Radicales de tres circunferencias cuyos centros no son colineales son concurrentes, entonces X es el centro radical de las tres circunferencias, luego las tangentes desde X a las tres circunferencias son congruentes.

Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos (Ver Figura 41.).

- Uno A con B .
- Trazo m la mediatriz de $\overline{AB}$.
- Por un punto O'' de m trazo circunferencia que pasa por A, B y que corte a la circunferencia dada $C(O', r')$ en los puntos C, D.
- Uno C con D y prolongo hasta cortar $\overleftrightarrow{AB}$ en X.
- Desde X trazo trazo $\overline{XT}$ y $\overline{XT_1}$ tangentes a la circunferencia dada $C(O', r')$.
- Las circunferencias que pasan por A, B, T y A, B, T_1 son las circunferencias pedidas (dos soluciones).

b) Si $O' \in m$. Sea $\{T\} = m \cap C(O', r')$, en este caso, O, T, O' son colineales y por tanto T es el punto de tangencia.

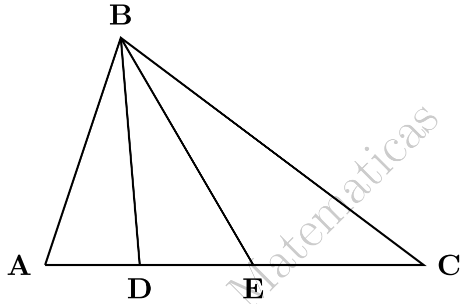
Construcción. Para la construcción, haremos los siguientes pasos consecutivos.

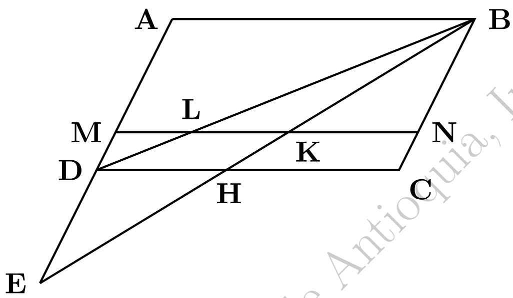
- Uno A con B .
- Trazo m la mediatriz de $\overline{AB}$, la cual intercepta a la circunferencia dada $C(O', r')$ en T .
- Trazo circunferencia que pase por los puntos A, B, T y esta es la circunferencia pedida.

7.8. Ejercicios y Problemas de Semejanza

1. Sea $MNPA$ un paralelogramo dado, entonces para cualquier semirrecta con origen en M y que corta a $\overline{NP}$ en B y a $\overline{AP}$ en C se cumple que $NB \cdot AC$ es constante.

2. En la figura, si $\widehat{ABD} \cong \widehat{DBE} \cong \widehat{EBC}$, entonces $\frac{AD}{EC} = \frac{AB \cdot BD}{BE \cdot BC}$.





3. Si $ABCD$ es un paralelogramo y $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$, $AB = 12$, $DM = 4$, $DE = 6$, $KB = 2KH$. Hallar: a) AM, b) DH, c) DC, d) KL, d) LM, e) MN.

4. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en C y $\overrightarrow{BD}$ cualquier semirrecta con origen en B y $D \in \overline{AC}$, probar que

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + DC^2$$

5. Demostrar que el cuadrado de la medida de la bisectriz $\overline{AE}$ de un ángulo exterior de un ΔABC es igual al producto de las medidas de los segmentos que la bisectriz determina sobre la recta que contiene al lado opuesto, menos el producto de las medidas de los otros dos lados. (Ayuda: siendo $C(O, r)$ la circunferencia que circunscribe al triángulo y $\{D\} = C(O, r) \cap \overleftrightarrow{AE}$, observar los ΔDAC y ΔABE).

6. Se tiene un cuadrado $ABCD$ de lado a. Se traza una circunferencia que pasa por el vértice A y por los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Probar que la medida de una tangente a dicha circunferencia trazada desde el punto C es igual a a.

7. Construir un triángulo dadas las razón entre los lados c y b (es decir, dado $\frac{c}{b} = \frac{p}{q}$), la mediana m_a y el lado a ($\frac{c}{b} = \frac{p}{q},\ m_a,\ a$)

8. Por un punto D del lado $\overline{AB}$ de un $\triangle ABC$ se traza $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ (E sobre $\overline{BC}$), de tal manera que $DB = e$, $CE = 2e$, $BE = 2AD$. Calcular los lados AB y BC del triángulo.

9. Demostrar que en un mismo triángulo las alturas son inversamente proporcionales a sus respectivos lados.

10. Considere la $C(O, r)$. Sea $\overline{AB}$ un diámetro. Se traza por B una tangente y por A una secante cualesquiera que corta a la $C(O, r)$ en M y a la tangente en N. Probar que $AM.AN = 4r^2$.

11. Sea ΔABC un triángulo rectángulo en A, si desde B y C se trazan semirrectas $\overline{n}$ y $\overline{m}$ que bisectan los lados opuestos $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en N y M respectivamente y si $l||\overline{BC}$ por A tal que $\overline{n} \cap l = \{D\}$ y $\overline{m} \cap l = \{E\}$ entonces
$$BD^2 + CE^2 = 5BC^2$$

12. Sea $C(O, r)$, se traza una cuerda $\overline{CD}$, O' el punto medio de $\overline{CD}$, se traza la circunferencia de centro O' y diámetro $\overline{CD}$, sea $\overline{AB}$ diámetro de $C(O, r)$ perpendicular a $\overline{CD}$; se trazan $\overline{AT}$ y $\overline{AT'}$ tangentes a la $C(O')$, la cuerda $\overline{TT'}$ corta a $\overline{AB}$ en F. Demostrar que O' es punto medio de $\overline{BF}$.

13. En $\triangle ABC$ rectángulo en A la hipotenusa mide a y la altura relativa a la hipotenusa mide h, se inscribe un cuadrado con un lado sobre la hipotenusa. Calcular el lado del cuadrado en términos de a y h.

14. En una circunferencia de diámetro 40cm. , hallar la medida de la mayor y la menor cuerda que puede trazarse por un punto situado a 12cm. del centro. Explicar porque es la mayor y la menor.

15. Desde el punto medio D del lado $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$, rectángulo en A, se traza $\overline{DE} \perp \overline{BC}$, con $E \in \overline{BC}$. Demostrar la relación
$$EC^2 - EB^2 = AC^2$$

16. Demostrar que el cuadrado de la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz determina en el lado opuesto menos el producto de los otros dos lados (Ayuda: si $\overline{CD}$ es la bisectriz exterior en el $\triangle ABC$ y $C(O,r)$ es la circunferencia que circunscribe al triángulo y $F \in C(O,r) \bigcap \overleftrightarrow{CD}$, demuestre que $\triangle ADC \sim \triangle FBC$).

17. En un $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$, se traza $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demostrar la relación
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = BD^2 + 2DA^2 + 3CD^2$$

18. Si el triángulo del ejercicio anterior fuera un triángulo equilátero, mostrar que las suma de los cuadrados de las medidas de los lados es igual a cuatro veces el cuadrado de la medida de la altura.

19. El $\triangle ABC$ esta inscrito en una $C(O,r)$, sea $\overrightarrow{AD}$ la bisectriz de $\widehat{A}$ con $D \in C(O,r)$ y sea $E \in \overline{BC} \cap \overrightarrow{AD}$. Mostrar que:
a) $BD^2 = AD.ED$, b) $\triangle BED \sim \triangle AEC$.

20. $LMNT$ es un paralelogramo, $LT = 15$, $LM = 8$, $RN = 12$, $\overleftrightarrow{NR}\perp\overleftrightarrow{LM}$, $\overleftrightarrow{TH}\perp\overleftrightarrow{MN}$, $H \in \overline{MN}$. Hallar TH.

21. Dado el $\triangle ABC$, sea $\overleftrightarrow{AN} \parallel \overline{BC}$ y M punto medio de $\overline{BC}$, sea $P \in \overleftrightarrow{NM} \cap \overleftrightarrow{AB}$ y $Q \in \overleftrightarrow{NM} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Demostrar que
$$\frac{PN}{PM} = \frac{QN}{QM}$$

22. Dado un $\triangle ABC$ isósceles con $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ y la circunferencia tangente a los lados congruentes en A y B. Desde un punto M del arco de la circunferencia en el interior del triángulo, se traza $\overline{MD} \perp \overline{AB}$, $\overline{MF} \perp \overline{CB}$ y $\overline{ME} \perp \overline{CA}$. Mostrar que
$$MD^2 = ME.MF$$

23. Sean $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ las alturas de un $\triangle ABC$; estas alturas se cortan en el punto H. Demostrar que:
$$AA'.A'H = A'C.A'B, \quad BB'.B'H = B'A.B'C, \quad CC'.C'H = C'B.C'A$$

24. Se dá una circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$, por un punto M sobre la prolongación de $\overline{AB}$, se trazan las tangentes $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ a la circunferencia, la cuerda $\overline{NP}$ corta al diámetro en C. Demostrar que:
$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$$

25. Demostrar que si dos triángulos tienen sus lados respectivamente paralelos o respectivamente perpendiculares, entonces dichos triángulos son semejantes.

26. Dado un paralelogramo $ABCD$, tal que: $DC = 32, AD = 17, AC = 28$. Hallar DB.

27. Sea ΔABC con $\overline{CE}$, $\overline{BD}$, $\overline{AF}$ bisectrices. Si $CA = 32$, $AB = 20$, $CB = 36$. Hallar AE, CF, AD.

28. Demostrar que la suma de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, no excede la longitud de la diagonal de un cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo como lado.

29. Demostrar que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

30. Sea un triángulo rectángulo ABC (recto en A), donde: $AB = 8, AC = 15$. Calcular $\overline{BC}$, la altura $\overline{AH}$ y los segmentos $\overline{BH}$ y $\overline{HC}$. Se traza por B una paralela a $\overline{AC}$ que corta la altura $\overline{AH}$ en I. Evaluar $\overline{AH}, \overline{HI}$ y $\overline{BI}$.

31. Sobre el lado $\overline{AB}$ de un ángulo $\widehat{BAC}$, se toman dos puntos D y E y por esos puntos se trazan dos paralelas que cortan al lado $\overline{AC}$ en F y G respectivamente; se trazan $\overline{FE}$ y por el punto G, una paralela a $\overline{FE}$ que corta a $\overline{AB}$ en H. Demostrar que $AE^2 = AD.AH$.

32. Dado un cuadrilátero $ABCD$, sea O el punto de intersección de sus diagonales. Por el punto O se traza una paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AB}$ en E; luego se traza por O una paralela a $\overline{CD}$ que corta a $\overline{AD}$ en F.

a. Mostrar que $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ (comparar cada una de estas razones con una misma razón).

b. Mostrar que $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$.

c. Se traza $\overline{OG} \parallel \overline{AB}$ y cortando $\overline{BC}$ en G y $\overline{OH} \parallel \overline{AD}$, corta a $\overline{DC}$ en H. Mostrar que $CG.DH = BG.CH$.

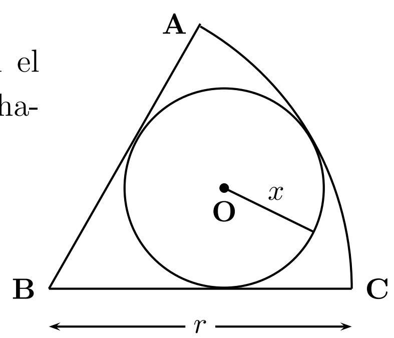
33. Demostrar que las paralelas a los lados de un triángulo ABC, trazadas por el punto G de concurrencia de las medianas, dividen cada lado en tres partes iguales.

34. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, sea F sobre $\overleftrightarrow{AC}$ y E sobre $\overleftrightarrow{DB}$ tales que $\overline{FB}||\overline{DC}$ y $\overline{EC}||\overline{AB}$. Mostrar que $\overline{AD}||\overline{FE}$.

35. El perímetro de un triángulo mide 90 cm.. Sabiendo que las medidas de los lados están en la relación 1 : 2 : 3. Calcular la medida de cada lado.

36. Demuestre que en triángulos semejantes las alturas homólogas, las medianas homólogas y las bisectrices homólogas son proporcionales a los lados homólogos.

37. En la figura, la $C(O, x)$ esta inscrita en el sector circular ABC. Si $m(\widehat{ABC}) = 60^o$, hallar x en función de r.
(**Rta.:** $\frac{r}{3}$) .

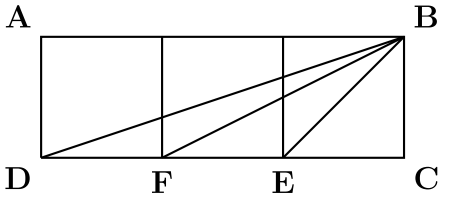


38. Si en un triángulo rectángulo, X y Y son las medidas de los catetos y Z es la medida de la altura correspondiente a la hipotenusa, demuestre que:

$$\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} = \frac{1}{Z^2}$$

39. Los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ΔABC miden respectivamente $4a$ y $3a$. Por el punto medio M de $\overline{AB}$ se traza hacia el exterior del triángulo, un segmento $\overline{MN}$ perpendicular a $\overline{AB}$ e igual a su mitad. Hallar la medida de $\overline{NC}$.

40. Los lados de un triángulo miden $10, 12$ y 18. Si el perímetro de un triángulo semejante a él mide 1,200, cuales son las medidas de los lados del segundo triángulo? Cuánto miden las tres alturas, las tres medianas y las tres bisectrices del primer triángulo?
(**Rta.:** 300, 360, 540, $30\sqrt{41}$, $30\sqrt{176}$, $30\sqrt{209}$)



41. Si ABCD es un rectángulo de lados a y $3a$. Demostrar que

$$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BFC}) + m(BDC)$$

42. a_1, b_1, c_1 son puntos medios de los lados del triángulo ΔABC. Demuestre: $\Delta ABC \sim \Delta a_1b_1c_1 \sim \Delta Ac_1b_1 \sim \Delta Bc_1a_1 \sim \Delta Cb_1a_1$

43. $ABCD$ es un paralelogramo $O \in AC, \overline{OX} \perp \overline{AD}, \overline{OY} \perp \overline{AB}$. Demostrar que $\frac{OX}{OY} = \frac{AB}{AD}$

44. Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto A. Del punto A, se trazan las secantes $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AE}$. B y D pertenecen a la circunferencia interior. C y E pertenecen a la circunferencia exterior. Demuestre que $\Delta ABD \sim \Delta ACE$.

45. Sea $\overline{AB}$ un diámetro en la $C(O, r)$, por B se traza una tangente a la circunferencia y por A se traza una secante cualquiera que intercepta la circunferencia en M y a la tangente en N. Demostrar que

$$AM \cdot AN = 4r^2$$

46. Demostrar que en un trapecio el segmento paralelo a las bases que pasa por el punto de intersección de las diagonales, es bisecado por dicho punto.

47. Dos triángulos rectángulos son semejantes. Si los catetos homólogos miden a y a', b y b' y las hipotenusas homólogas miden c y c', demostrar que $aa' + bb' = cc'$.

48. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia de radio r y sea $\{X\} = \overline{AB} \cap \overline{CD}$. Demostar que

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = 4r^2$$

49. Las bases mayor y menor de un trapecio miden a y b respectivamente. Por un punto de uno de los lados no paralelos se traza un segmento paralelo a las bases. El segmento divide al lado en la relación $m : n$. Calcular la longitud del segmento.

50. Dado el $\triangle ABC$, se consideran los puntos D, E, F sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente. Si las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ pasan por el centro O de la circunferencia circunscrita del $\triangle ABC$, cuyo radio es R, mostrar que
$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$

51. En un triángulo el punto de concurrencia de: las alturas, el de las medianas y el de las mediatrices están alineados (Recta de Euler).

52. Demostrar que en todo triángulo, la bisectriz se encuentra entre la mediana y la altura trazadas desde el mismo vértice.

53. Las bases de un trapecio miden 20 y 12 y los lados no paralelos miden 10 y 12. Calcular la medida de las diagonales y de las alturas y los lados del triángulo que se forma al prolongar los lados no paralelos.

54. $ABCD$ es un cuadrilátero. $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, $CE = EA = m, BF = FD = n, EF = r$.
Demuestre: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2m)^2 + (2n)^2 + 4r^2$.

55. Sea P un punto cualesquiera en uno de los lados de un rectángulo. Probar que la suma de las medidas de los segmentos perpendiculares desde P a las diagonales del rectángulo es constante.

56. Construír un triángulo ABC, conociendo

    a) $\overline{BC}, \widehat{ABC}$ y $\overline{BN}$ que es la altura desde B, (a, β, h_b).
    b) $\overline{BC}, \overline{AM}$ y $\overline{AH}$ que son la mediana y la altura correspondientes a $\overline{BC}$, (a, m_a, h_a).
    c) $\overline{BC}$, y la altura y la bisectriz $\overline{BH}$ y $\overline{CD}$, (a, h_b, v_c).
    d) $\overline{BC}$ y las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CP}$, (a, h_b, h_c).
    e) $\overline{BC}, \overline{AC}$ y la altura $\overline{BH}$, (a, b, h_b).
    f) $\overline{BC}, \widehat{BAC}$ y la mediana $\overline{AM}$, (a, α, m_a).

g) $\overline{BC}, \widehat{BAC}$ y la altura $\overline{BH}$, (a, α, h_b).

h) Los pies de las tres medianas.

i) Las tres medianas: m_a, m_b, m_c.

j) $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ y el perímetro , $(\beta, \gamma, p$; donde $p = a + b + c)$.

57. Construir un triángulo equilátero, conociendo el radio de la circunferencia inscrita.

58. Construir un triángulo equilátero, conociendo su perímetro.

59. Construir un triángulo isósceles conociendo el perímetro y la medida de la altura correspondiente a la base.

60. Construir una circunferencia que pase por dos puntos A y B y que sea tangente a una recta l; con A y B del mismo lado con respecto a l.

    a) $\overline{AB} \parallel l$, b)$\overline{AB} \cap l = \{P\}$.

61. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas paralelas dadas y que pase por un punto dado.

62. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas que se cortan y pase por un punto en el interior del ángulo entre las dos rectas.

63. Dado un punto en el interior de una circunferencia, construir una cuerda tal que el punto dado sea punto medio de dicha cuerda.

64. Sea AB diámetro de una circunferencia, A, B, M colineales con B entre A y M, $\overline{MN}$ tangente en N y $\overline{NC} \perp \overline{AB}$, C entre A y B. Mostrar que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB}$$

65. Sea $ABCD$ un paralelogramo, $\overrightarrow{AM}$ bisectriz de $\widehat{DAB}$ con $M \in \overline{DB}$ y $\overrightarrow{DN}$ bisectriz de $\widehat{ADC}$ con $N \in \overline{AC}$. Probar que $\overline{MN}||\overline{AD}$.

66. Sea $\overline{XY}$ diámetro de la $C(O, r)$, sean $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ cuerdas congruentes y M punto medio de $\overline{AB}$ y M' punto medio de $\overline{A'B'}$, se proyectan estas cuerdas sobre el diámetro $\overline{XY}$ y determinan respectivamente los segmentos $\overline{HQ}$ y $\overline{H'Q'}$. Demostrar que los triángulos ΔHMQ y $\Delta H'M'Q'$ son semejantes.

67. Dado un ángulo XOY y un punto A en el interior de $\widehat{XOY}$, trazar por A una recta que corte a $\overrightarrow{OX}$ en M y a $\overrightarrow{OY}$ en N, de tal forma que A sea punto medio de $\overline{MN}$.

68. Dos circunferencias de centros O y O_1 y de radios diferentes son secantes en A. Trazar por A una cuerda $\overline{BC}$, de tal forma que A sea el punto medio de $\overline{BC}$. ($B \in C(O)$ y $C \in C(O_1)$).

69. Construír un triángulo conociendo dos ángulos y la suma de las medidas de dos de sus lados.

70. Construir un rectángulo $ABCD$ conociendo $\overline{AB}$ y el ángulo $\widehat{AOB}$ formado por las diagonales.

71. Construir un triángulo ABC, rectángulo en A, conociendo la suma de las medidas de los catetos y el ángulo $\widehat{C}$.

72. Construir un rectángulo conociendo su perímetro y su diagonal.

73. Construir un trapecio conociendo sus bases y sus diagonales.

74. Construir un cuadrilátero conociendo sus lados y una de sus diagonales.

75. Construir un cuadrilátero inscriptible conociendo $\overline{BD}$, y $\overline{AC}$ que son sus diagonales, el ángulo $\widehat{A}$ y el lado $\overline{AB}$.

76. Dados dos segmentos de longitud a cm. y b cm., construir con regla y compás:
    a) un segmento de longitud ab cm., b) un segmento de longitud $\frac{a}{b}$ cm.

77. Construir una circunferencia que sea tangente a dos rectas dadas y cuyo centro esté sobre una recta dada.

78. Trazar una recta tangente a una circunferencia dada y paralela a una recta dada.

79. Construir un triángulo conociendo:

    a) Los pies E, F, D de las tres alturas.

    b) Un lado $\overline{BC}$, el ángulo opuesto α , y la suma o la diferencia de los otros dos lados $(a, \alpha, c - b)$, $(a, \alpha, c + b)$.

c) Un ángulo β y las alturas opuestas $\overline{AD}$ y $\overline{CF}$. (β, h_a, h_c).

d) Un ángulo β , la altura $\overline{BE}$ y la altura $\overline{AD}$, (β, h_b, h_a).

e) Un lado $\overline{BC}$, un ángulo β , y la mediana $\overline{AD}$ (a, β, m_a).

f) El perímetro, un ángulo y la altura bajada desde el vértice del ángulo: (p, α, h_a).

g) La altura y bisectriz bajadas del mismo vértice y el radio de la circunferencia inscrita (v_c, h_c, r).

h) La altura y la mediana bajadas desde el mismo vértice y el radio de la circunferencia circunscrita $(m_a,\ h_a,\ R)$.

80. Construir un triángulo conociendo:

a) Dos lados y la longitud de la bisectriz del ángulo comprendido (a, c, v_b).

b) La base $\overline{AB}$, el ángulo opuesto y la suma de las medidas de los lados que comprenden este ángulo $(c, \gamma, a + b)$.

81. Por un punto P exterior a una circunferencia trazar una secante PAB, tal que $\frac{PA}{AB} = \frac{m}{n}$ donde $m,\ n$ son dos números naturales dados.

CAPÍTULO 8

AREAS

8.1. INTRODUCCIÓN

AXIOMAS DE ÁREAS
Sea $P = \{p/p \quad \text{es un polígono simple en el plano} \quad \pi\}$.
Definimos la función área A, como la función

$$\begin{aligned} A : &P \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ &p \mapsto A(p) \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades (o axiomas):

1. El área de un cuadrado de lado l es l^2.

2. Si un polígono simple se puede descomponer en n polígonos simples $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tales que sus interiores no se intercepten, entonces

$$A(p) = A(p_1) + A(p_2) + \cdots + A(p_n) = \sum_{i=1}^{n} A(p_i)$$

a esta propiedad se le llama axioma de aditividad de áreas.

3. Si dos polígonos son congruentes entonces sus áreas son iguales.

Notación: dado un polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotamos su área por $A[A_1 A_2 \cdots A_n]$

Definición 68 (**Area Unitaria).** *El área correspondiente a un cuadrado cuyo lado tiene por medida uno, se le llama área unitario y por tanto su área mide uno.*

Definición 69 (**Polígonos Equivalentes).** *Cuando dos polígonos tienen la misma área diremos que son equivalentes.*

Si p y p' son polígonos equivalentes entonces lo denotamos así: $p \equiv p'$, es decir

$$p \equiv p' \text{ si y solo si } A[p] = A[p']$$

Nota: $p \cong p'$ si y solo si $p \sim p'$ y $p \equiv p'$

Teorema 117 (**Area del rectángulo).**

El área de un rectángulo, cuyos lados miden a y b es $a \cdot b$

Demostración. (Ver Figura 1.)

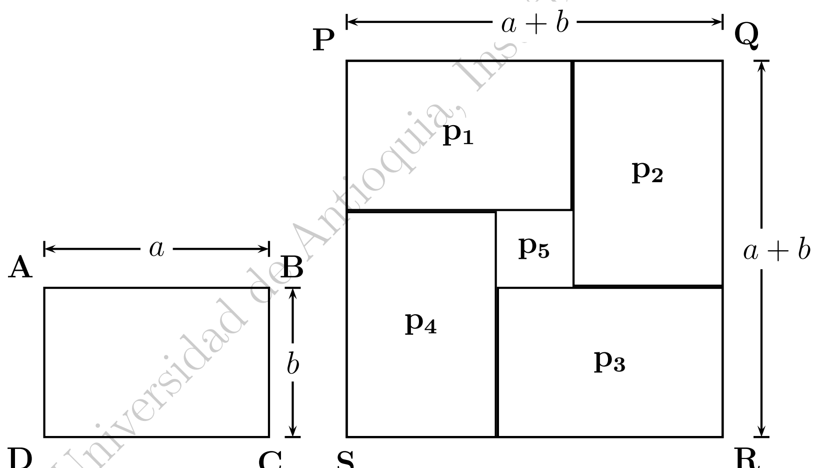


Figura 1.

Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = a$ y $BC = b$ y sea $PQRS$ un cuadrado de lado $a+b$. Este cuadrado se puede partir en cuatro rectángulos p_1, p_2, p_3, p_4 de lados a y b y un cuadrado p_5 de lado $b-a$, de tal manera que sus interiores no se intersecten, como se muestra en la figura, aplicando el axioma de aditividad de áreas y el axioma del área del cuadrado, tenemos que

$$A[PQRS] = (a+b)^2 = A[p_1]+A[p_2]+A[p_3]+A[p_4]+A[p_5] = 4A[p_1]+(b-a)^2$$

es decir

$$(a+b)^2 = 4A[p_1] + (b-a)^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 4A[p_1] + a^2 + b^2 - 2ab$$

despejando $A[p_1] = ab$ ■

Teorema 118 (**Area del paralelogramo).**

El área de un paralelogramo es igual al producto de la medida de uno de sus lados por la distancia de este lado al lado opuesto.

Demostración. (Ver Figura 2.)

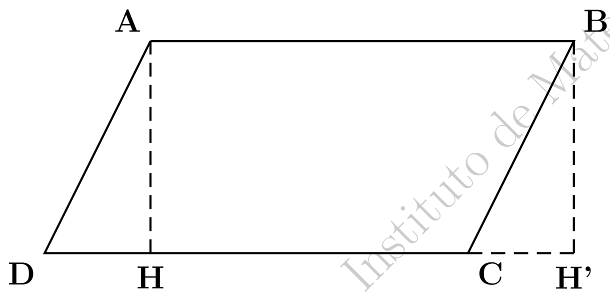


Figura 2.

Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea $\overline{AH} \perp \overline{DC}$, por B pasa $\overline{BH'} \perp \overline{DC}$. Como $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AH} \cong \overline{BH'}$ entonces por el criterio H-C

$$\triangle ADH \cong \triangle BCH'$$

por lo tanto $\overline{DH} \cong \overline{CH'}$ y $A[\triangle ADH] = A[\triangle BCH']$, luego

$$HH' = HC + CH' = HC + DH = DC.$$

Por lo tanto por los axiomas 2. y 3. de áreas y por el Teorema 117:

$$\begin{aligned} A[ABCD] &= A[\triangle ADH] + A[ABCH] = A[\triangle BCH'] + A[ABCH] \\ &= A[ABH'H] = HH' \cdot HA \\ &= DC \cdot HA \end{aligned}$$

■

Nota: según el enunciado del teorema anterior, el área de un paralelogramo es igual al producto de la medida de uno de sus lados por la altura relativa a ese lado.

Corolario 43. *Si dos paralelogramos tienen un par de lados respectivamente congruentes y las alturas respectivas a estos lados iguales entonces los dos paralelogramos son equivalentes.*

Teorema 119 (Area del triángulo).

El área de un triángulo es igual al semi-producto de la medida de uno de los lados por la medida de la altura relativa a este lado.

Demostración. (Ver Figura 3.)

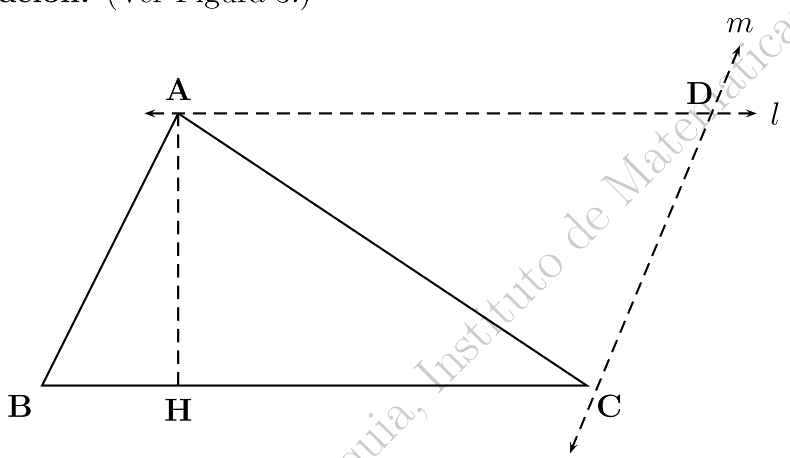


Figura 3.

Por Playfair, por A pasa $l \parallel \overline{BC}$ y por C pasa $m \parallel \overline{AB}$. Sea $\{D\} = l \cap m$ y sea $\overline{AH}$ la altura relativa al lado $\overline{BC}$. Por lo tanto $ADCB$ es un paralelogramo, por lo tanto, por el criterio L-L-L,

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC$$

o sea que $A[\triangle ABC] = A[\triangle ADC]$. Pero, por el Teorema 118,

$$A[ADCB] = BC \cdot AH$$

y por el axioma 2. de áreas

$$A[ADCB] = A[\triangle ABC] + A[\triangle ADC] = 2A[\triangle ABC]$$

luego $A[\triangle ABC] = \frac{1}{2}BC \cdot AH$. ■

Los siguientes corolarios se dejan como ejercicio.

Corolario 44. *Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente congruentes y las alturas relativas a estos lados también congruentes entonces los dos triángulos son equivalentes.*

Corolario 45. *Sea el $\triangle ABC$ y l una recta paralela a $\overline{BC}$ por A y sea X un punto cualquiera de la recta l, entonces*

$$A[\triangle BXC] = A[\triangle ABC]$$

La Figura 4. ilustra este corolario.

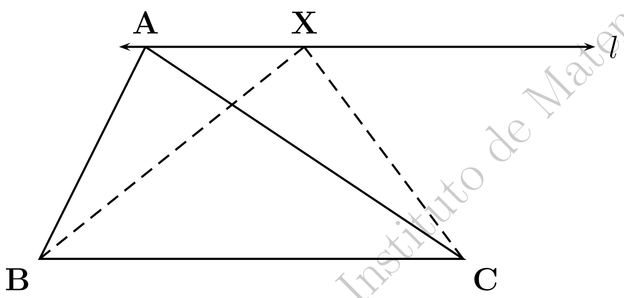


Figura 4.

Corolario 46. *El área de un triángulo rectángulo es igual al semi-producto de las medidas de los catetos.*

Corolario 47. *El área de un triángulo equilátero cuyos lados miden a, es igual $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.*

Teorema 120.
Si dos triángulos tienen un par de ángulos respectivamente congruentes o respectivamente suplementarios, entonces sus áreas son entre si como como el producto de las medidas de los lados que comprenden el ángulo.

Demostración. (Ver Figura 5.)

Sean los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tales que $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$. Por el axioma de construcción de segmentos, existen $D \in \overrightarrow{BA}$ y $E \in \overrightarrow{BC}$ tales que $\overline{BD} \cong \overline{B'A'}$ y $\overline{BE} \cong \overline{B'C'}$, por lo tanto, por el criterio L-A-L, $\triangle ABC \cong \triangle BDE$. Sea $\overline{DH}$

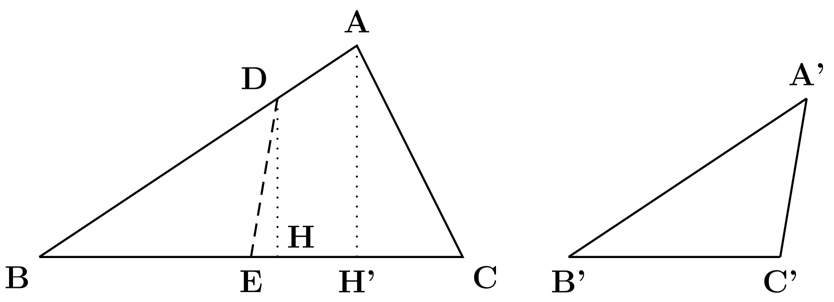


Figura 5.

la altura relativa al lado $\overline{BE}$ en el $\triangle DBE$ y sea $\overline{AH'}$ la altura relativa al lado $\overline{BC}$ en el $\triangle ABC$.
Como los $\triangle DBH$ y $\triangle ABH'$ son rectángulos y tienen un ángulo común, entonces

$$\triangle ABH' \sim \triangle DBH$$

luego

$$\frac{BA}{BD} = \frac{AH'}{DH}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{A[\triangle ABC]}{A[\triangle DBE]} &= \frac{\frac{1}{2}BC \cdot AH'}{\frac{1}{2}BE \cdot DH} = \frac{BC \cdot AH'}{BE \cdot DH} \\
&= \frac{BC}{BE} \cdot \frac{AH'}{DH} = \frac{BC}{BE} \cdot \frac{BA}{BD} \\
&= \frac{BC \cdot BA}{B'C' \cdot B'A'}
\end{aligned}$$

■

Teorema 121 (Fórmula de Herón).

El área de un triángulo, cuyos lados miden a, b, c es

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde $p = \frac{a+b+c}{2}$ se le llama el semi-perímetro.

Demostración. (Ver Figura 6.)

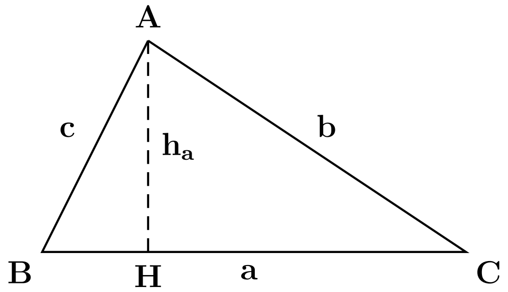


Figura 6.

Por el Teorema 108, $h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p = \frac{a+b+c}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} A[\triangle ABC] &= \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$ ■

Teorema 122 (Area del trapecio).

El área de un trapecio es igual a la semisuma de sus bases por la altura, donde la altura es la distancia entre los lados paralelos.

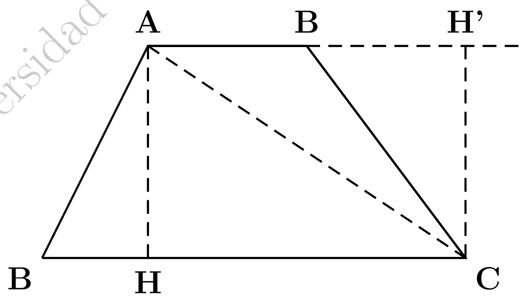


Figura 7.

Demostración. Sea H la proyección de A sobre $\overleftrightarrow{DC}$ y H' la proyección de

C sobre $\overleftrightarrow{AB}$; como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ entonces $\overline{AH} \cong \overline{CH'}$, por el axioma 2. de áreas

$$A[ABCD] = A[\triangle ACD] + A[\triangle ABC] = \frac{1}{2}DC \cdot AH + \frac{1}{2}AB \cdot CH'$$
$$= \frac{1}{2}(DC + AB) \cdot AH \qquad \blacksquare$$

Corolario 48. *El área de un trapecio es igual al producto de la medida de la paralela media por la distancia entre los lados paralelos. Donde la paralela media es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 123. .

El área de un rombo es igual al semi-producto de las medidas de las diagonales.

Teorema 124.

Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre sus áreas es igual al cuadrado de su razón de semejanza.

Demostración. (Ver Figura 8.)

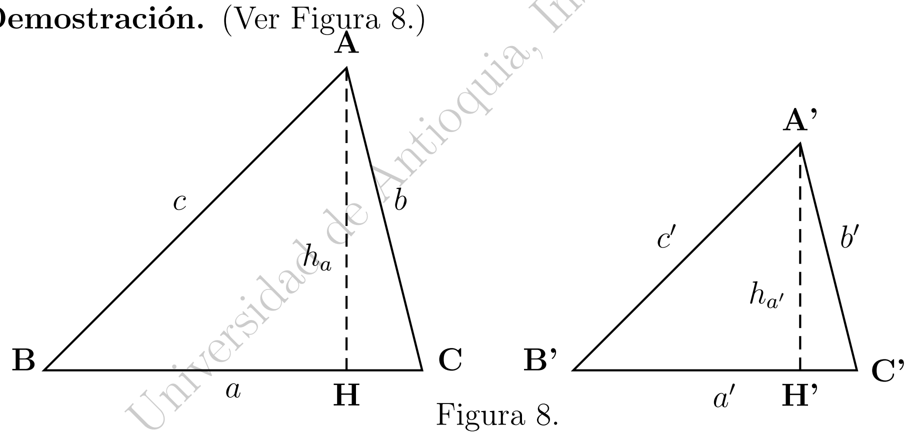


Figura 8.

Por hipótesis $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ con razón de semejanza r, es decir,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r.$$

Sea h_a la altura relativa al lado a en el $\triangle ABC$ y $h_{a'}$ la altura relativa al lado a' en el $\triangle A'B'C'$, entonces por el corolario 37,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h_a}{h_{a'}} = r$$

luego

$$\frac{A[\triangle ABC]}{A[\triangle A'B'C']} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a}{\frac{1}{2}\cdot a'\cdot h_{a'}} = \frac{a\cdot h_a}{a'\cdot h_{a'}} = \frac{a}{a'}\cdot\frac{h_a}{h_{a'}} = r\cdot r = r^2. \qquad \blacksquare$$

Teorema 125.

El área de un polígono regular es igual al semi-producto del perímetro por la medida de la apotema.

Demostración. Sea $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ un polígono regular de n lados, sea a_n su apotema, l_n su lado y $C(O,r)$ la circunferencia que circunscribe al polígono, entonces los triángulos $\triangle A_1OA_2$, $\triangle A_2OA_3, \ldots, \triangle A_nOA_1$ son isósceles y congruentes, por lo tanto,

$$A[P_n] = A[A_1A_2\cdots A_n] = n\cdot A[\triangle A_1OA_2] = n\cdot\frac{1}{2}\cdot l_n\cdot a_n = \frac{1}{2}(nl_n)\cdot a_n = \frac{1}{2}p_na_n,$$

donde p_n es el perímetro del polígono P_n. $\blacksquare$

Teorema 126 (**Cuadratura de un polígono de n lados**).

Todo polígono es equivalente a un cuadrado.

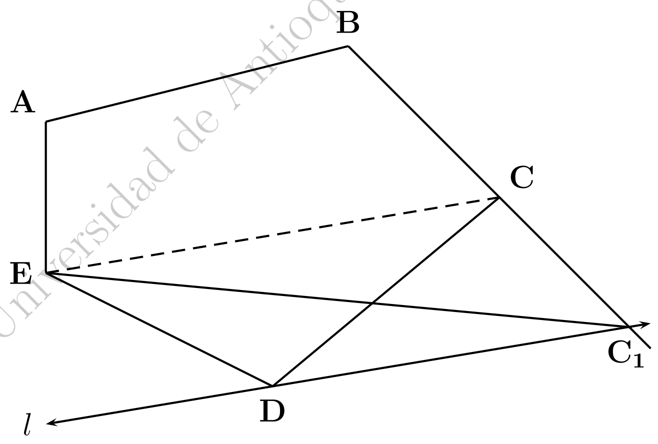


Figura 9.

Demostración. La demostración la haremos en dos etapas:
1.) Probaremos que todo polígono de n lados ($n \geq 4$) es equivalente a un polígono de $n-1$ lados y repitiendo este proceso $n-2$ veces, llegaremos a

un triángulo equivalente al polígono inicial.
2.) Probaremos que todo triángulo es equivalente a un cuadrado.

1.) Sin pérdida de generalidad, supondremos que $n = 5$ y sea $ABCDE$ el polígono inicial.
Eliminemos por ejemplo, el vértice D de la siguiente manera (Ver Figura 9.). Trazamos la diagonal cuyos extremos son los vértices adyacentes a D, es decir, $\overline{EC}$, por Playfair, por D pasa $l \parallel \overline{EC}$, sea $\{C_1\} = l \cap \overleftrightarrow{BC}$, entonces por el corolario 45,

$$A[\triangle ECD] = A[\triangle ECC_1]$$

y por el axioma 2. de áreas

$$\begin{aligned} A[ABCDE] &= A[ABCE] + A[\triangle ECD] = A[ABCE] + A[\triangle ECC_1] \\ &= A[ABC_1E] \end{aligned}$$

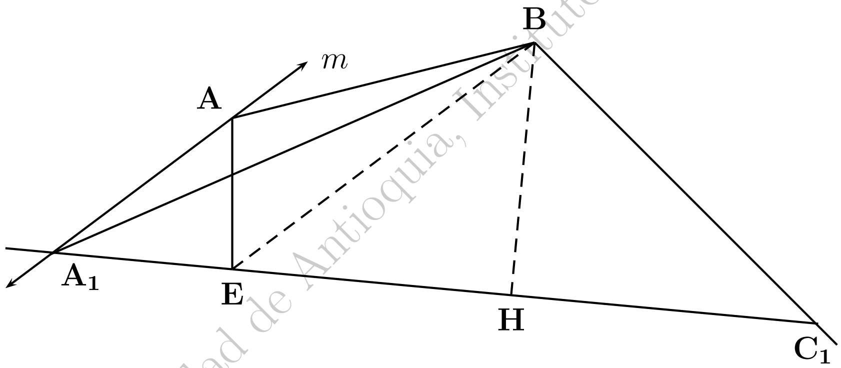


Figura 10.

Ahora eliminemos, por ejemplo el vértice A (ver Figura 10.), de la siguiente manera. Trazamos la diagonal cuyos extremos son los vértices adyacentes a A, es decir, $\overline{EB}$, por Playfair, por A pasa $m \parallel \overline{EB}$, sea $\{A_1\} = m \cap \overleftrightarrow{C_1E}$, entonces por el corolario 45,

$$A[\triangle EBA] = A[\triangle EBA_1]$$

y por el axioma 2. de áreas

$$\begin{aligned} A[ABC_1E] &= A[\triangle BC_1E] + A[\triangle BEA] = A[\triangle BC_1E] + A[\triangle BEA_1] \\ &= A[\triangle BC_1A_1] \end{aligned}$$

Por lo tanto $A[ABCDE] = A[\triangle BC_1A_1]$

2.) Veamos que $A[\triangle BC_1A_1]$ es equivalente a un cuadrado de la lado p, es decir, se debe cumplir que

$$p^2 = A[\triangle BC_1A_1] = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BH,$$

donde $\overline{BH}$ es la altura relativa al lado $\overline{A_1C_1}$, por lo tanto, p es media proporcional entre $\frac{1}{2}A_1C_1$ y BH. Para hallar p efectuamos el siguiente procedimiento (ver Figura 11.): sobre una recta r fijamos un punto X, por el axioma de construcción de segmento, existe un punto $Y \in \overline{r}$ tal que $\overline{XY} \cong \overline{A_1C_1}$, y existe un punto Z tal que $\overline{YZ} \cong \overline{BH}$ y $X - Y - Z$. Sea M el punto medio de $\overline{XY}$ y sea O el punto medio de $\overline{MZ}$ y sea $C(O, OZ)$, por Y pasa $n \perp r$, sea $\{W\} = n \cap C(O, OZ)$ y como $\overline{MZ}$ es diámetro entonces el $\triangle MZW$ es rectángulo y por las relaciones métricas en el triángulo rectángulo,

$$YW^2 = MY \cdot YZ = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BH$$

por lo tanto $p = YW$. ■

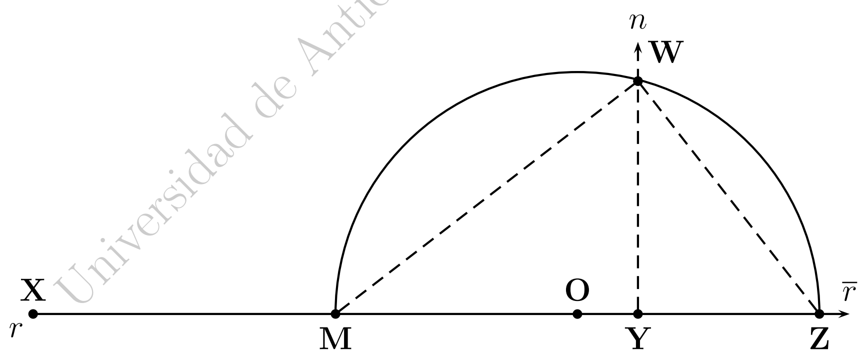


Figura 11.

8.2. LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL NÚMERO π

Como dos polígonos regulares del mismo número de lados tienen sus ángulos congruentes y sus lados respectivos son proporcionales, entonces podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 127.
Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.

8.2.1. Introducción

1.) Consideremos la circunferencia $C(O, r)$ e inscribamos un polígono regular de n lados

$$P_n = A_1A_2 \cdots A_n,$$

denotemos por l_n su lado, a_n su apotema, p_n su perímetro, $A[P_n]$ su área; por lo tanto

$$p_n = nl_n, \quad A[P_n] = \frac{p_n a_n}{2} = \frac{nl_n a_n}{2}$$

2.) Si duplicamos el número de lados obtenemos el polígono

$$P_{2n} = A_1A'_1A_2A'_2 \cdots A_nA'_n,$$

cuyos elementos notables l_{2n}, a_{2n}, p_{2n}, $A[P_{2n}]$ guardan las siguientes relaciones con los elementos notables del polígono anterior P_n (Ver Figura 12.):

i. como OA'_1 es bisectriz de A_1OA_2 entonces por el teorema 78, $A_1A_2 = l_n > A_1A'_1 = l_{2n}$.

ii. como $l_n > l_{2n}$ entonces por el teorema 75, $a_n < a_{2n}$.

iii. por el teorema de la desigualdad triangular $A_1A_2 < A_1A'_1 + A'_1A_2$ o sea que $l_n < 2l_{2n}$ luego $nl_n < n(2l_{2n}) = 2nl_{2n}$, por lo tanto

$$p_n < p_{2n}$$

iv. por iii. se prueba que $A[P_n] < A[P_{2n}]$.

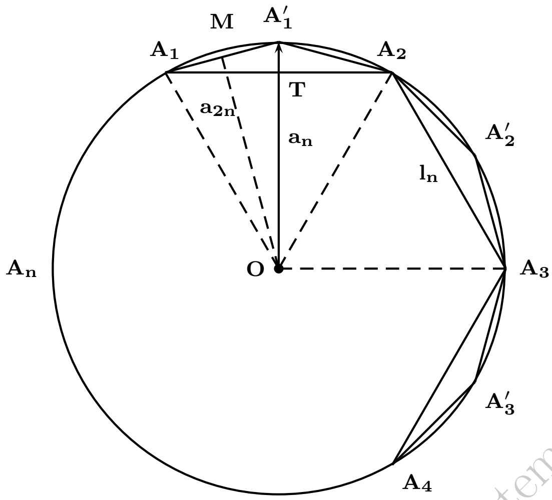


Figura 12.

3. Si nuevamente duplicamos el número de lados, obtenemos el polígono P_{2^2n} con las siguientes relaciones:

$$l_n > l_{2n} > l_{2^2n}, \quad a_n < a_{2n} < a_{2^2n}, \quad p_n < p_{2n} < p_{2^2n}$$

$$A[P_n] < A[P_{2n}] < A[P_{2^2n}]$$

4. Podemos seguir indefinidamente este proceso, obteniéndose una sucesión de polígonos

$$P_n, P_{2n}, P_{2^2n}, \ldots, P_{2^kn}, \ldots$$

inscritos en la circunferencia $C(O, r)$ con las siguientes sucesiones de sus elementos notables:

$$l_n > l_{2n} > l_{2^2n} > \cdots l_{2^kn} > \cdots$$

$$a_n < a_{2n} < a_{2^2n} < \cdots a_{2^kn} < \cdots$$

$$p_n < p_{2n} < p_{2^2n} < \cdots p_{2^kn} < \cdots$$

$$A[P_n] < A[P_{2n}] < A[P_{2^2n}] < \cdots A[P_{2^kn}] < \cdots$$

Para los resultados que vamos analizar más adelante, nos interesan las sucesiones de las apotemas, los perímetros y las áreas. Estas tres sucesiones son estrictamente crecientes. La primera es acotada superiormente por el radio

(el radio es la menor de las cotas superiores); la segunda es acotada superiormente por el perímetro de cualquier polígono que contenga en su interior la circunferencia $C(O, r)$; la tercer es acotada superiormente por el área de cualquier polígono que contenga en su interior la circunferencia $C(O, r)$.
Para la conclusión que haremos a continuación necesitamos el siguiente teorema del cálculo: (Ver texto El Cálculo con Geometría Analítica de Louis Leithold) Sea $\{a_n\}$ un sucesión estrictamente creciente de números reales y sea B la mínima cota superior de $\{a_n\}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

Por lo tanto para las apotemas tenemos el siguiente resultado

$$\lim_{k\to\infty} a_{2^k n} = r.$$

Para los perímetros,

$$\lim_{k\to\infty} p_{2^k n}$$

existe, este límite lo denotamos por L.
Para las áreas,

$$\lim_{k\to\infty} A[P_{2^k n}]$$

existe.

Definición 70. 1. *Por definición al límite*

$$\lim_{k\to\infty} p_{2^k n}$$

lo llamamos longitud de la circunferencia y lo denotamos por L, es decir

$$L = \lim_{k\to\infty} p_{2^k n}$$

2. *Por definición al límite*

$$\lim_{k\to\infty} A[P_{2^k n}]$$

lo llamamos el área del círculo y lo denotamos por $A[\overline{\mathbf{C}}(O, r)]$, es decir

$$A[\overline{\mathbf{C}}(O, r)] = \lim_{k\to\infty} A[P_{2^k n}]$$

Nota: el proceso anterior lo hicimos inscribiendo polígonos regulares en la circunferencia $C(O, r)$, en forma similar podemos hacer un proceso circunscribiendo polígonos regulares a la circunferencia $C(O, r)$, obteniéndose sucesiones estrictamente decrecientes para los perímetros y las áreas. Los límites serían L para los perímetros y $A[\overline{\mathbf{C}}(O, r)]$ para las áreas.

8.2.2. El número π y la longitud de la circunferencia

El siguiente teorema garantiza la existencia del número π.

Teorema 128.

La razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es constante.

Demostración. (Ver Figura 13.) Para la demostración tomamos dos circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ y veamos que para ambas circunferencia, los cocientes entre la longitud de la circunferencia y su diámetro son iguales, es decir, este cociente es el mismo, independiente de las circunferencias que se tomen.

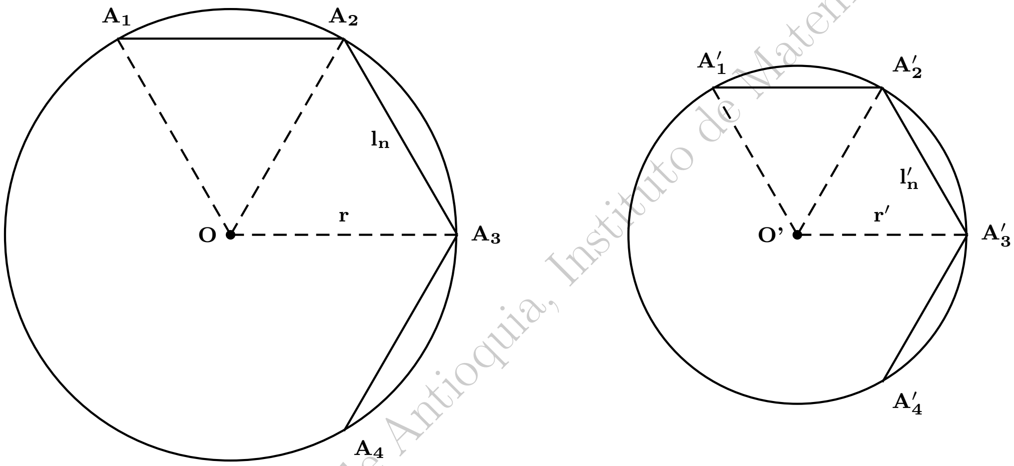


Figura 13.

Inscribimos en la $C(O, r)$ un polígono regular $P_n = A_1A_2 \cdots A_n$ y en la $C(O', r')$ un polígono regular $P'_n = A'_1A'_2 \cdots A'_n$, por lo tanto

$$P_n \sim P'_n,$$

en consecuencia $\triangle OA_1A_2 \sim \triangle O'A'_1A'_2$, luego

$$\frac{A_1A_2}{r} = \frac{A'_1A'_2}{r'} \Longrightarrow \frac{l_n}{r} = \frac{l'_n}{r'}$$

multiplicando por n y dividiendo por dos a ambos lados de la última proporción, obtenemos que

$$n\frac{l_n}{2r} = n\frac{l'_n}{2r'} \Longrightarrow \frac{p_n}{2r} = \frac{p'_n}{2r'}.$$

Si duplicamos indefinidamente el número de lados, obtenemos de la misma manera en el paso $k+1$ la siguiente proporción

$$\frac{p_{2^k n}}{2r} = \frac{p'_{2^k n}}{2r'},$$

tomando límites a ambos lados de la proporción, cuando k tiende a ∞, se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{2^k n}}{2r} = \lim_{k\to\infty} \frac{p'_{2^k n}}{2r'}$$

y por las propiedades de los límites

$$\frac{1}{2r} \lim_{k\to\infty} p_{2^k n} = \frac{1}{2r'} \lim_{k\to\infty} p'_{2^k n}$$

es decir,

$$\frac{L}{2r} = \frac{L'}{2r'}$$

donde L, L' son las longitudes de las circunferencias $C(O, r)$ y $C(O', r')$ respectivamente.
En conclusión, para todas las circunferencias, el cociente $\frac{L}{2r}$ es constante, a esta constante se le llama el número π. ■

Nota: el matemático alemán Johan Lamber (1728-1777) demostró que el número π es un número irracional, es decir, el número π tiene infinitas cifras decimales que no se repiten periódicamente, aproximadamente $\pi \approx 3{,}14159$

Como el resultado del teorema anterior fue $\frac{L}{2r} = \pi$, entonces tenemos el siguiente corolario.

Corolario 49. *La longitud de la circunferencia $C(O, r)$ es $L = 2\pi r$.*

8.2.3. Area del círculo

En el capítulo de la circunferencia, definimos el círculo, denotado por $\overline{\mathbf{C}}(O, r)$ como la unión de la circunferencia $C(O, r)$ y su interior, es decir

$$\overline{\mathbf{C}}(O, r) = C(O, r) \cup IntC(O, r)$$

Veamos el teorema del área del círculo.

Teorema 129 (Area del círculo).

El área del círculo $\overline{\mathbf{C}}(O,r)$ *es* $A[\overline{\mathbf{C}}(O,r)] = \pi r^2$

Demostración. Como en los teoremas anteriores, inscribimos un polígono regular P_n en la circunferencia $C(O,r)$ y luego hacemos el proceso de duplicación de los lados, obteniéndose en el paso $k+1$ el polígono regular $P_{2^k n}$ y su área es

$$A[P_{2^k} n] = \frac{1}{2} p_{2^k n} a_{2^k n}$$

tomado límites a ambos lados y aplicando las propiedades de los límites, se obtiene

$$\begin{aligned} A[\overline{\mathbf{C}}(O,r)] &= \lim_{k\to\infty} A[P_{2^k} n] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} p_{2^k n} a_{2^k n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} p_{2^k n} \cdot \lim_{k\to\infty} a_{2^k n} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

■

8.2.4. El Radian

Utilizaremos a continuación el número π para dar una nueva medida de ángulo, que llamaremos radian.

Sea $C(O,r)$ una circunferencia de radio r, por lo tanto su longitud es

$$L = 2\pi r,$$

a continuación dividimos la circunferencia en cuatro arcos congruentes; la longitud de cada uno de ellos es

$$l(\overset{\frown}{AB}) = l(\overset{\frown}{BC}) = l(\overset{\frown}{CD}) = l(\overset{\frown}{DA}) = \frac{\pi}{2} \cdot r$$

(ver Figura 14.), como los cocientes

$$\frac{l(\overset{\frown}{AB})}{r} = \frac{l(\overset{\frown}{BC})}{r} = \frac{l(\overset{\frown}{CD})}{r} = \frac{l(\overset{\frown}{DA})}{r} = \frac{\pi}{2}$$

y como los cuatro arcos son congruentes, entonces los cuatro ángulos al centro son congruentes , entonces tomaremos como medida de los ángulos al centro la constante $\frac{\pi}{2}$. Como los cuatro ángulos al centro son rectos, entonces diremos que cada ángulo recto tiene por medida $\frac{\pi}{2}$ radianes. Por lo tanto el ángulo llano $\widehat{AOC}$ mide π radianes y la circunferencia completa mide 2π radianes.

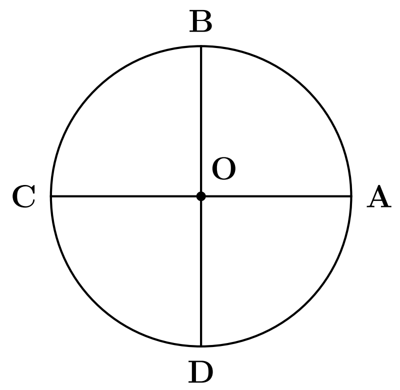


Figura 14.

Definición 71 (**(Radian).** *La unidad de medida radian corresponde a un ángulo al centro que subtiende un arco cuya longitud es r, para cualquier $C(O, r)$.*

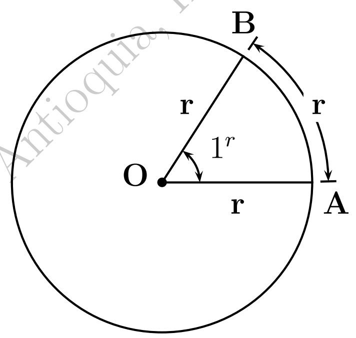


Figura 15.

En la Figura 15. $m(\widehat{AOB}) = 1^r$

8.2.5. Longitud de arco

Teorema 130.

La longitud de un arco cuyo ángulo al centro es θ^r en una circunferencia $C(O, r)$ es $\theta \cdot r$.

Demostración. En efecto, como existe una relación directa entre longitud de arco y ángulo al centro, entonces es cierta la siguiente relación

$$\frac{L}{2\pi} = \frac{l(\overset{\frown}{AB})}{\theta^r}$$

donde L es la longitud de la circunferencia $C(O, r)$, es decir, es $2\pi r$ y $l(\overset{\frown}{AB})$ es la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ en la $C(O, r)$, luego

$$l(\overset{\frown}{AB}) = \frac{L \cdot \theta^r}{2\pi} = \frac{2\pi \cdot r \cdot \theta^r}{2\pi} = r \cdot \theta^r. \qquad \blacksquare$$

Nota: cuando θ esta dado en grados entonces $l(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\pi \cdot r \cdot \theta}{180}$

8.2.6. Area del sector circular

Definición 72 (Sector circular). *Es una sub-región del círculo delimitada por dos radios y el arco (arco principal o no principal) entre los dos radios.*

Si dividimos el arco del sector circular en n (n número natural) arcos congruentes, la poligonal que se obtiene uniendo los extremos de estos arcos, se le llama poligonal regular y la denotamos por P'_n, el lado lo denotamos por l'_n, las apotemas las denotamos por a'_n y el perímetro los denotamos por p'_n y el área entre los dos radios y la poligonal regular por $A[OP'_n]$.

Teorema 131 (Area del sector circular).

El área del sector circular es igual al semi-producto del radio por la longitud del arco.

Demostración. (Ver Figura 16.)

Sea AOB un sector circular delimitado por los radios OA, OB y el arco $\overset{\frown}{AB}$ y sea $P'_n = AA_1 \cdots A_{n-1}B$ una poligonal regular inscrita en el arco $\overset{\frown}{AB}$ y sea $A[OP'_n] = A[OAA_1 \cdots A_{n-1}B]$ el área entre los radios y la poligonal regular, luego

$$A[OP'_n] = A[OAA_1 \cdots A_{n-1}B] = n(\frac{1}{2} \cdot l'_n \cdot a'_n) = \frac{1}{2}(n \cdot l'_n) \cdot a'_n) = \frac{1}{2} \cdot p'_n \cdot a'_n.$$

Duplicando el número de lados indefinidamente, obtenemos en el paso $k + 1$

$$A[OP'_{2^k n}] = \frac{1}{2} \cdot p'_{2^k n} \cdot a'_{2^k n}.$$

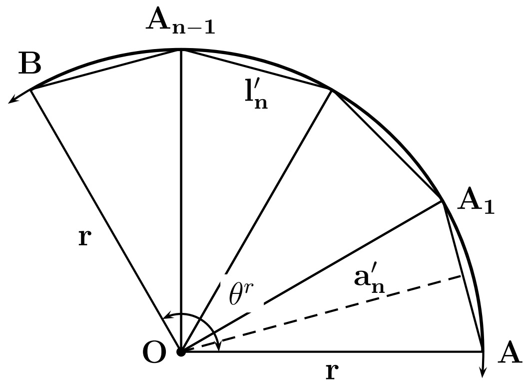


Figura 16.

Tomando límites

$$A[sectorAOB] = \lim_{k\to\infty} A[OP'_{2^k n}] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot p'_{2^k n} \cdot a'_{2^k n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} p'_{2^k n} \cdot \lim_{k\to\infty} a'_{2^k n} =,$$

$$A[sectorAOB] = \frac{1}{2} \cdot l(\overset{\frown}{AB}) \cdot r,$$

donde $l(\overset{\frown}{AB})$ es la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$. ■

Nota: si el ángulo al centro es θ^r entonces $A[sectorAOB] = \frac{1}{2} \cdot \theta^r \cdot r^2$

8.2.7. Area del Segmento Circular

Definición 73 (Segmento Circular). *El segmento circular es la parte del círculo limitada por una cuerda y el arco principal correspondiente.*

En la Figura 17. la región sombreada en el círculo $\overline{\mathbf{C}}(O, r)$, corresponde a un segmento circular entre el arco $A\overset{\frown}{C}B$ y la cuerda $\overline{AB}$, el cual denotamos por $segACB$, donde h es la distancia del centro O a la cuerda $\overline{AB}$ y θ^r es la medida del ángulo $\widehat{AOB}$ en radianes, llamando $s = l(A\overset{\frown}{C}B)$ tenemos el siguiente teorema, que se deja como ejercicio.

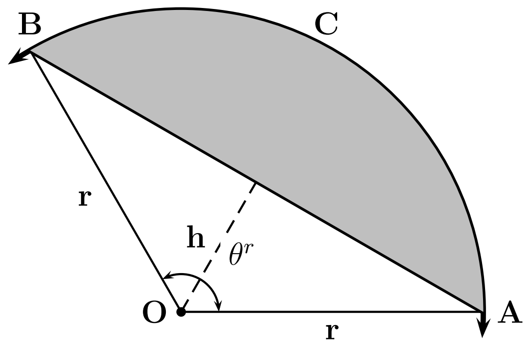


Figura 17.

Teorema 132.
El área del segmento circular segACB es

$$A[segACB] = \frac{1}{4}(2sr - AB\sqrt{4r^2 - (AB)^2})$$

Nota: el área del segmento circular en función del ángulo al centro en radianes es

$$A[segACB] = \frac{1}{4}(2r^2\theta^r - AB\sqrt{4r^2 - (AB)^2}).$$

8.3. Relaciones Métricas en los Polígonos Regulares

Presentamos en esta sección las relaciones que existen en algunos polígonos regulares, entre sus lados y sus apotemas, en función del radio de la circunferencia circunscrita.

1. **El Cuadrado.**
   Sea el cuadrado $P_4 = ABCD$, con lado l_4 y apotema a_4. Sea r el radio de la circunferencia circunscrita al polígono $P_4 = ABCD$,

   en el $\triangle AOB$ rectángulo se tiene $AB^2 = OA^2 + OB^2$ o se que $l_4^2 = 2r^2$, luego
$$l_4 = \sqrt{2} \cdot r$$

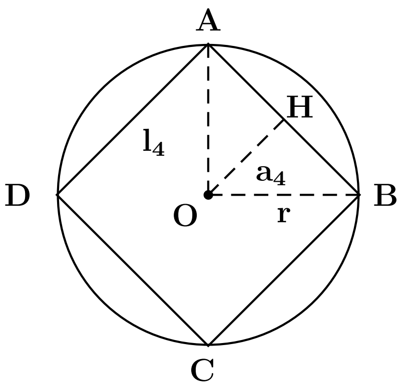


Figura 18.

En el $\triangle OHA$ rectángulo, se tiene que $OA^2 = AH^2 + OH^2$ o sea que $r^2 = (\frac{l_4}{2})^2 + (a_4)^2 = (\frac{\sqrt{2}r}{2})^2 + (a_4)^2 = \frac{r^2}{2} + (a_4)^2$,luego

$$a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$$

2. **El Octógono Regular.**
Del cuadrado $ABCD$ obtenemos el octógono regular, duplicando el número de lados del cuadrado, es decir, uniendo los puntos medios de los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$ con los extremos adyacentes en cada arco (ver Figura 19.).

Como E es punto medio del $\overset{\frown}{AB}$ y F es punto medio del $\overset{\frown}{CD}$ entonces $\overline{EF}$ es diámetro, luego el $\triangle AEF$ es rectángulo y como $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ entonces

$$l_8^2 = AE^2 = EF \cdot HE = 2r \cdot (OE - OH) = 2r \cdot (r - a_4) = 2r \cdot (r - \frac{\sqrt{2}}{2} r)$$

luego

$$l_8 = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Como O es punto medio de $\overline{EF}$ y G es punto medio de $\overline{AE}$ entonces $OG = a_8 = \frac{AF}{2}$ y como el $\triangle EAF$ es rectángulo, entonces

$$AF^2 = EF \cdot FH = 2r \cdot (FO + OH) = 2r \cdot (r + a_4) = 2r \cdot (r + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r)$$

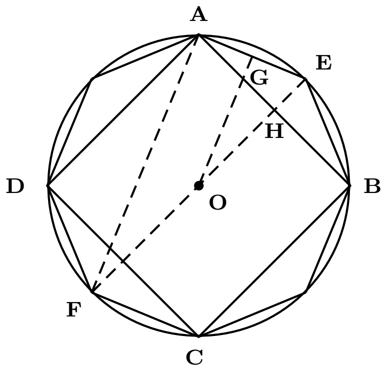


Figura 19.

$$AF^2 = r^2(2 + \sqrt{2})$$

luego

$$a_8 = \frac{AF}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

3. **El Hexágono .** Sea $P_6 = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexágono regular

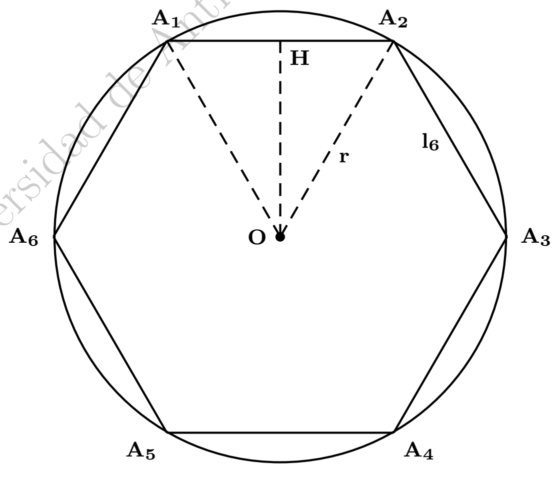


Figura 20.

sea $l_6 = A_1A_2$ y $OH = a_6$. Como $m(\widehat{A_1OA_2}) = \frac{360}{6} = 60$ entonces el

$\triangle A_1OA_2$ es equilátero, por lo tanto $A_1A_2 = OA_1 = r$ luego

$$l_6 = r.$$

En el $\triangle OHA_1$ rectángulo, se tiene que

$$\begin{aligned} OH^2 &= OA_1^2 - A_1H^2 = r^2 - (\frac{A_1A_2}{2})^2 = r^2 - (\frac{l_6}{2})^2 \\ &= r^2 - (\frac{r}{2})^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2 \end{aligned}$$

luego

$$a_6 = OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r$$

4. **El Triángulo Equilátero.** En el Hexágono uniendo cada dos vértices, pero dejando uno de por medio, se obtiene un triángulo equilátero (ver Figura 21.)

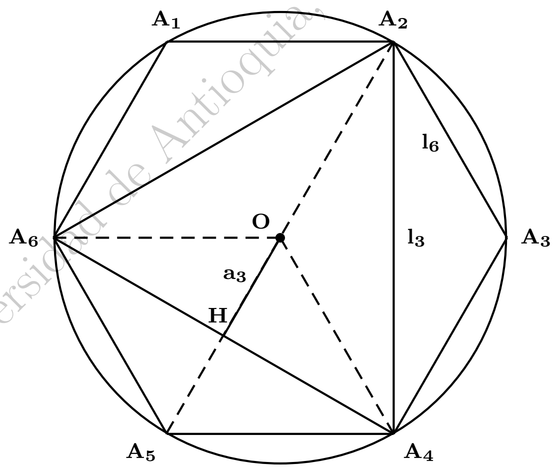


Figura 21.

en la Figura 21., como A_2A_5 es diámetro, entonces el $\triangle A_2A_4A_5$ es rectángulo, por lo tanto,

$$A_2A_4^2 = A_2A_5^2 - A_4A_5^2 = (2r)^2 - l_6^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

luego
$$l_3 = A_2A_4 = \sqrt{3} \cdot r$$

Como $OA_4A_5A_6$ es un rombo y H es punto medio de $\overline{OA_5}$, entonces
$$a_3 = OH = \frac{OA_5}{2} = \frac{r}{2}$$

5. **Decágono y decágono estrellado.** Resolveremos el siguiente problema: dada una $C(O, r)$, construir con regla y compás un decágono regular y una estrella de diez puntas (o decágono regular estrellado). Primero analicemos el problema y luego haremos la construcción.

   Observemos que si dividimos la circunferencia en diez arcos congruentes y unimos estos puntos dejando dos de por medio, se obtiene una estrella de diez puntas, ver la Figura 22.

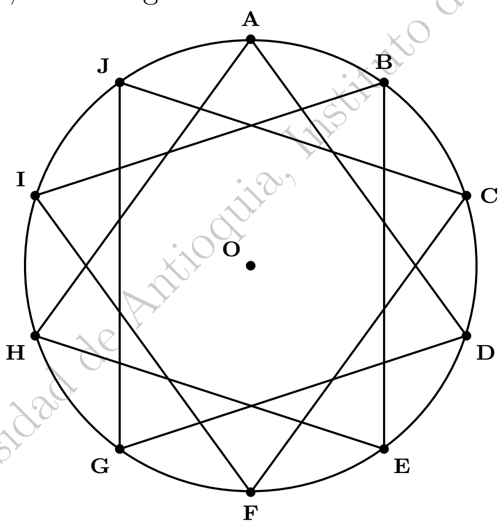


Figura 22.

   Sea $AB = l_{10}$ el lado del decágono convexo y sea $AD = l'_{10}$ el lado de la estrella de diez puntas (ver Figura 23.), como
$$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD}) = \cdots = m(\overset{\frown}{JA}) = 36^0$$

   entonces
$$m(\widehat{DAF}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{DF}) = \frac{1}{2} \cdot 72^0 = 36^0,$$

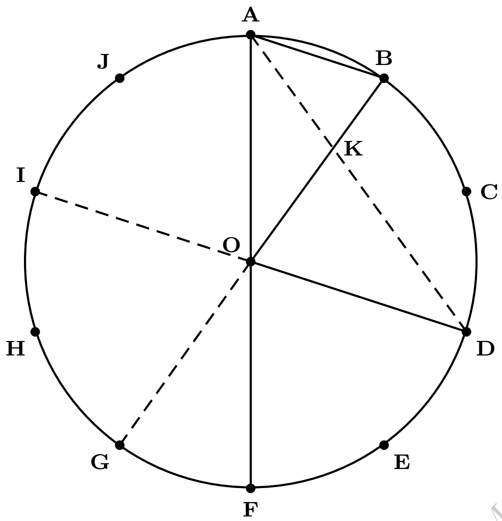


Figura 23.

$$m(\widehat{ADI}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AI}) = \frac{1}{2} \cdot 72^0 = 36^0,$$

luego el $\triangle ADO$ es isósceles.
También

$$m(\widehat{ABG}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AG}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 36^0 = \frac{1}{2} \cdot 144^0 = 72^0,$$

$$m(\widehat{AKB}) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{DG})] = \frac{1}{2} \cdot [36^0 + 108^0] = \frac{1}{2} \cdot 144^0 = 72^0,$$

luego el $\triangle BAK$ es isósceles.

También $m(\widehat{BOD}) = m(\overset{\frown}{BD}) = 72^0$ y $m(\widehat{OKD}) = m(\widehat{AKB}) = 72^0$, luego el $\triangle OKD$ es isósceles.
De lo anterior, se concluye que $AK = AB = l_{10}$ y $KD = OD = r$, por lo tanto $l'_{10} = AD = AK + KD = l_{10} + r$, de aquí sacamos la primera relación:

$$\boxed{l'_{10} - l_{10} = r} \quad \text{(primera condición)} \tag{8.1}$$

por otro lado, $m(\widehat{AOB}) = 36^0 = m(\widehat{DAF})$, por lo tanto el $\triangle AKO$ es isósceles y por tanto $OK = AK = l_{10}$ y por el criterio A-A,

$$\triangle OKA \sim \triangle AOD$$

$$\frac{AD}{OA} = \frac{OD}{AK} \Longrightarrow \frac{l'_{10}}{r} = \frac{r}{l_{10}}$$

luego

$$\boxed{l_{10} \cdot l'_{10} = r^2} \quad \text{(segunda condición)} \tag{8.2}$$

Para hallar l_{10} y l'_{10} con regla y compás hacemos el siguiente procedimiento.

- Con centro en un punto O y radio r trazamos una circunferencia (ver Figura 24.).
- Por O trazamos dos diámetros perpendiculares $\overline{MN} \perp \overline{AF}$.
- Hallamos O' punto medio de $\overline{OM}$.
- Con centro en O' y radio $O'M$ ($O'M = O'O = \frac{r}{2}$), trazo circunferencia.

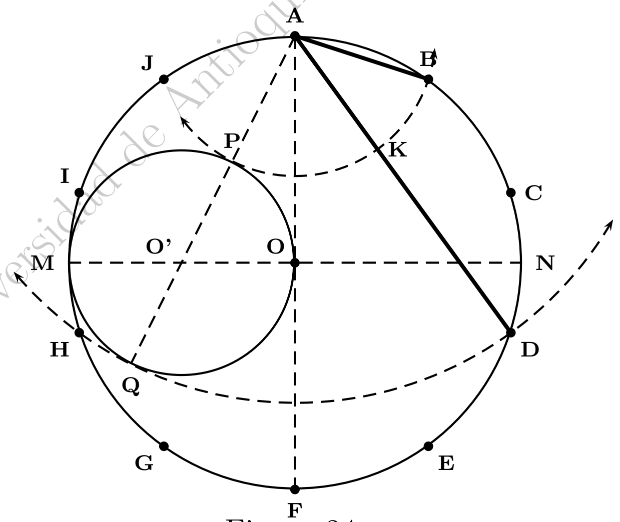


Figura 24.

- Uno A con O' y prolongo hasta corta la $C(O', O'M)$ en P y Q.
- Entonces $AP = l_{10}$ y $AQ = l'_{10}$

Justificación: veamos que AP y AQ cumplen las propiedades 8.1 y 8.2.
En efecto: $AQ - AP = PQ = 2O'M = r$
y como $\overline{AO}$ es tangente a la $C(O', O'M)$ en O entonces por el teorema 114, $AP \cdot AQ = AO^2 = r^2$

Ahora hallemos l_{10} y l'_{10} en función del radio.
Como $\triangle AOO'$ es rectángulo, entonces por el teorema de Pitágoras

$$AO' = \sqrt{AO^2 + OO'^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{r}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r,$$

pero como

$$AB = l_{10} = AP = AO' - O'P = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

es decir

$$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

También

$$AQ = AP + PQ = l_{10} + r = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) + r = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

6. **El Pentágono y el Pentágono Regular Estrellado.** Resolveremos el siguiente problema: dada una $C(O, r)$, construir con regla y compás un pentágono y un pentágono regular estrellado y con esta construcción también podremos construir un decágono regular y una estrella de diez puntas (problema anterior).
Primero analicemos el problema y luego haremos la construcción.
Si la $C(O, r)$ la dividimos en diez arcos congruentes y después unimos los puntos de división, dejando uno de por medio, obtenemos un pentágono regular y si unimos sus puntos dejando tres de por medio, obtenemos un pentágono regular estrellado, (ver Figura 25.)

   En la Figura 26. tenemos que $AC = l_5$, $AE = l'_5$, $CF = l'_{10}$ y $EF = l_{10}$. Como AF es diámetro, entonces los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle AEF$ son triángulos rectángulos,

$$l_5 = \sqrt{4r^2 - l'_{10}} = \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{4}(\sqrt{5} + 1)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

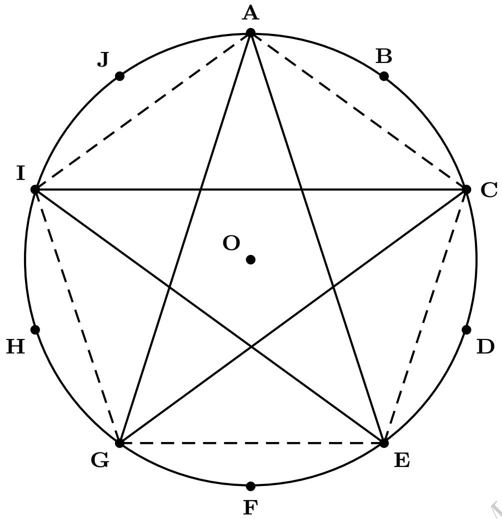


Figura 25.

$$\boxed{l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

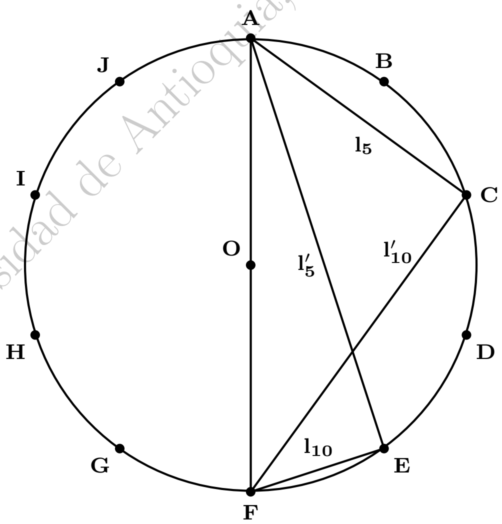


Figura 26.

y también

$$l'_5 = \sqrt{4r^2 - l_{10}^2} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\boxed{l'_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Ahora veamos las relaciones que deben cumplir l_5, l'_5 y l_{10}, l'_{10} en términos del radio. Como los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle AEF$ son triángulos rectángulos, entonces por el teorema de Pitágoras

$$(l_5)^2 + (l'_{10})^2 = 4r^2 \ (*) \quad \text{y} \quad (l'_5)^2 + l_{10}^2 = 4r^2 \ (**)$$

y como $l'_{10} - l_{10} = r$ (ver la condición 8.1) y elevando al cuadrado esta última expresión

$$(l'_{10})^2 + (l_{10})^2 - 2l'_{10}l_{10} = r^2,$$

pero $l'_{10}l_{10} = r^2$ (ver la condición 8.2), entonces

$$(l'_{10})^2 + (l_{10})^2 = 3r^2$$

despejando $(l'_{10})^2$ y sustituyendo en (*): $l_5^2 + 3r^2 - (l_{10})^2 = 4r^2$ o sea que

$$\boxed{l_5^2 - l_{10}^2 = r^2} \quad \text{(tercera condición)} \tag{8.3}$$

y despejando $(l_{10})^2$ y sustituyendo en (**): $(l'_5)^2 + 3r^2 - (l'_{10})^2 = 4r^2$ o sea que

$$\boxed{(l'_5)^2 - (l'_{10})^2 = r^2} \quad \text{(cuarta condición)} \tag{8.4}$$

Ahora construiremos simultáneamente $l_5, l'_5, l_{10}, l'_{10}$ dada la circunferencia $C(O, r)$.

Para hallar $l_5, l'_5, l_{10}, l'_{10}$ con regla y compás hacemos el siguiente procedimiento.

- Con centro en un punto O y radio r trazamos una circunferencia (ver Figura 27.).
- Por O trazamos el diámetro $\overline{MN}$ perpendicular con el radio $\overline{OA}$, es decir, $\overline{MN} \perp \overline{OA}$.
- Hallamos O' punto medio de $\overline{OM}$.
- Con centro en O' y radio $O'A$, trazo circunferencia, la cual corta a $\overleftrightarrow{MN}$ en P y Q.

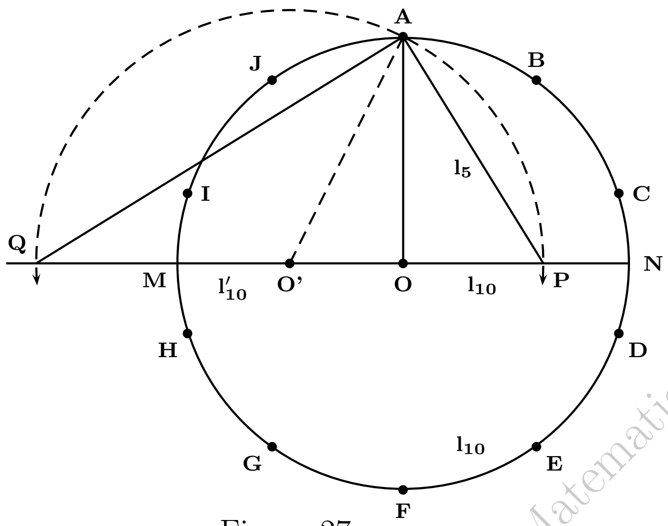


Figura 27.

- Uno P con A y Q con A.
- Entonces $OP = l_{10}$, $OQ = l'_{10}$, $AP = l_5$ y $AQ = l'_5$.

Justificación: veamos que OP, OQ, AP y AQ cumplen las condiciones 8.1, 8.2, 8.3 y 8.4.

- veamos que OP y OQ cumplen la condición 8.1. En efecto, como O' es punto medio de $\overline{OM}$ y O' es punto medio de $\overline{PQ}$ entonces $\overline{OP} \cong \overline{MQ}$, luego
$$OQ - OP = OQ - MQ = r.$$
- veamos que OP y OQ cumplen la condición 8.2. En efecto, como $\overline{QP}$ es diámetro, entonces el $\triangle QAP$ es rectángulo y por tanto, por el teorema 102,
$$OP \cdot OQ = OA^2 = r^2$$
- veamos que AP y OP cumplen la condición 8.3. En efecto, como el $\triangle OAP$ es rectángulo, entonces
$$AP^2 - OP^2 = OA^2 = r^2$$
- veamos que OQ y AQ cumplen la condición 8.4. En efecto, como el $\triangle OAQ$ es rectángulo, entonces
$$AQ^2 - OQ^2 = OA^2 = r^2$$

8.4. Ejercicios y Problemas de Areas.

1. El perímetro y las medidas de las diagonales de un rombo miden 34 y la relación entre un lado y una diagonal es $\frac{5}{6}$. Hallar el área del rombo.

2. Las bases de un trapecio miden a y $3a$, uno de los lados oblicuos es congruente con la base menor del trapecio y forma un ángulo de 45^0 con la base mayor. Hallar el área del trapecio.

3. Dado el $\triangle ABC$, si $\overline{CM}$ y $\overline{BN}$ son medianas. Mostrar que
$$A[\triangle BCM] = A[\triangle BCN].$$

4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en O y $\overline{OD} \cong \overline{OB}$. Mostrar que $A[\triangle ADC] = A[\triangle ABC]$.

5. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en B, $\overline{BM}$ mediana, $BC = a$, $AC = 2a$, $\overline{CE} \parallel \overline{BM}$, $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$. Calcular las siguientes áreas: $A[BMCE]$, $A[\triangle AMB]$, $A[\triangle ABC]$.

6. Sea $ABCD$ un rectángulo cuyos lados miden 24 y 12, E es el punto medio de $\overline{DC}$. Hallar la medida del segmento $\overline{AF}$ tal que $A[\triangle BEF] = \frac{13}{24}A[ABED]$; hallar el área del $\triangle BEC$.

7. Sea $ABCD$ un rectángulo, E punto medio de $\overline{AB}$, $AB = 12$, $BC = 6$
   a) Calcular el área del rectángulo $ABCD$
   b) Calcular el área del trapecio $AECD$
   c) Sea F un punto entre C y D. Hallar AF tal que el área del $\triangle FCE$ sea $\frac{7}{12}$ del área del cuadrilátero $FCBE$

8. Dos circunferencias $C(O, r)$, $C(O', r)$ donde $r = 1$ y cada una de ellas pasando por el centro de la otra, se cortan en A y B, sea $\{C\} = \overrightarrow{O'O} \bigcap C(O, r)$. Hallar:
   a) Las medidas de los ángulos $\widehat{BCO'}$, $\widehat{O'AB}$, $\widehat{BAC}$
   b) La longitud del perímetro del rombo $OAO'B$
   c) El área del rombo.
   d) La superficie común a los dos círculos.

9. Las bases de un trapecio miden a y $3a$, uno de los lados oblicuos es igual a la base menor y forma un ángulo de 45^o con la base mayor. Hallar el área del trapecio.

10. Dado un $\triangle ABC$ rectángulo en A, cuya hipotenusa $\overline{BC}$ mide $2a$, $m(\widehat{C}) = 30^o$. Se traza la mediana $\overline{AM}$ y por los puntos A y B se trazan paralelas a $\overline{BC}$ y $\overline{AM}$ respectivamente, estas paralelas se cortan en N. Hallar el área del cuadrilátero $AMBN$.

11. Dado un rectángulo $ABCD$ con $AB = 34$ y $BC = 20$ y sobre $\overline{AB}$ un punto N tal que $AN = 10$. Determinar sobre $\overline{CD}$ un punto M tal que la diferencia de áreas de los trapecios $ADMN$ y $BCMN$ sea 80 unidades cuadradas.

12. En un trapecio rectángulo $ABDC$ de altura $AC = 20$, de bases $AB = 27$, $CD = 45$ se traza un recta $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AC}$ con $E \in \overleftrightarrow{AB}$ y $F \in \overleftrightarrow{CD}$. Determinar sobre la base $\overline{CD}$ dos puntos F y G tales que el trapecio quede dividido por las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{EG}$ en tres partes equivalentes.

13. Las dos bases de un trapecio miden 15 y 27 cm. Se une uno de los extremos de la base menor con un punto M de la base mayor tal que el triángulo y el cuadrilátero que se forman tienen la misma área, encontrar el punto M.

14. Mostrar que el triángulo determinado por las rectas que van del punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio a los vértices opuestos es equivalente a la mitad del trapecio.

15. Hallar una fórmula para calcular el área comprendida entre tres circunferencias del mismo radio y tangentes exteriormente.

16. Se tiene un $\triangle ABC$ inscrito en una circunferencia de radio R. Sabiendo que $m(\widehat{BAC}) = 60^0$ y $m(\widehat{ABC}) = 45^0$. Encontrar el área del triángulo. (**Rta.:** $\frac{R^2}{4}(3 + \sqrt{3})$)

17. Si los lados de un triángulo miden $84, 84$ y 60, y el perímetro de un triángulo semejante a este es 285.

    a) Cuales son las medidas de los lados del segundo triángulo?

    b) Cual es el área del segundo triángulo?

c) Cual es la longitud de la altura del primer triángulo?.

18. Demostrar que en un triángulo, cualquiera de las medianas lo divide en dos triángulos equivalentes.

19. Dado el ΔABC con medianas $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ relativas a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, las cuales se cortan en O. Probar que las regiones determinadas por el cuadrilátero $ANOM$ y el triángulo ΔBOC, son equivalentes.

20. Demostrar que el área de un trapecio es igual al producto de la altura por la base media del trapecio. (la base media de un trapecio es el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio)

21. Demostrar que la relación de polígonos equivalentes es una relación de equivalencia.

22. Dado un triángulo equilátero de lado x, probar que la longitud de cualquiera de sus alturas es: $h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

23. El área de un hexágono regular es $50\sqrt{3}$ centímetros cuadrados. Cuales son el perímetro y la apotema?

24. Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. Hallar la razón de sus áreas.

25. La longitud de cada uno de los lados de un octógono regular es 2 centímetros. Cual es su área?

26. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado a, sea E un punto entre D y A y F un punto entre A y B, $H \in \overline{EC} \bigcap \overline{DF}$. Si $DE = AF = \frac{2}{3}a$, mostrar que:
a) $\overline{DF} \perp \overline{EC}$, b) $[\triangle DEH] = \frac{4}{39}a^2$, c) $[CHFB] = \frac{17}{39}a^2$

27. Si la apotema de un hexágono regular es de 5 metros. Cuales son el perímetro y el área?

28. Sea el triángulo ΔABC, con D entre A y C, $\overline{AC} \cong \overline{CB}, \overline{AB} \cong \overline{BD}$, probar que: $(m\overline{AB})^2 = (m\overline{AC}).(m\overline{AD})$

29. Sea el triángulo ΔABC acutángulo, con $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ las alturas respectivas, las cuales se cortan en O, probar que:

$$m\overline{AF}.m\overline{BD}.m\overline{CE} = m\overline{AE}.m\overline{BF}.m\overline{CD}$$

30. Sea el trapecio $ABCD$ con lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, sea E el punto de corte de las diagonales, probar que

$$m\overline{AE}.m\overline{DE} = m\overline{BE}.m\overline{CE}$$

31. Sea el triángulo ΔABC acutángulo, con $\overline{AD} \perp \overline{BC}, \overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{AD} \bigcap \overline{BE} = \{F\}$, probar que:

$$\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AC}}.\frac{m\overline{BC}}{m\overline{BE}} = 1$$

32. Sean D, E y F los puntos medios de los lados de un triángulo ΔABC, probar que $\Delta DEF \sim \Delta ABC$

33. Sea el triángulo ΔABC, con D entre B y C, E entre A y C, F entre A y B, $\overline{DF} \perp \overline{AB}, \overline{DE} \perp \overline{AC}, \widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$, probar que:

$$\frac{m\overline{FD}}{m\overline{ED}} = \frac{m\overline{BD}}{m\overline{CD}}$$

34. Sea el triángulo ΔABC, con D entre B y C, E entre A y C, F entre A y B, $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $AFDE$ rectángulo, probar que:

$$A(AFDE) = \sqrt{m\overline{AE}.m\overline{AF}.m\overline{BF}.m\overline{CE}}$$

35. Sea el triángulo ΔABC isósceles con $\widehat{ABC}$ recto, D punto medio de $\overline{AB}$, E punto medio de $\overline{BD}$ sombrear el triángulo ΔCDE. Hallar:

   a) El área de la región sombreada en función del área del triángulo ΔABC.

   b) El área de la región no sombreada en función del área del triángulo ΔABC.

   c) La razón entre el área de la región no sombreada y el triángulo ΔABC.

(**Rta.:** a)$\frac{1}{4}A[\triangle ABC]$, b)$\frac{3}{4}A[\triangle ABC]$, $\frac{3}{4}$)

36. Sea $ABCD$ un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, E punto medio de $\overline{AB}$. Mostrar que $AECD \equiv EBCD$.

37. Demostrar que las tres medianas de un triángulo determinan seis triángulos equivalentes.

38. Sea $ABCD$ un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, sea E el punto medio de $\overline{BC}$. Probar que:

$$A(ADE) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

39. Sea el triángulo ΔABC equilátero sea h la medida de cualquiera de las alturas del triángulo, sea D un punto cualquiera en el interior del triángulo, sean $\overline{DE} \perp \overline{AB}, \overline{DF} \perp \overline{AC}, \overline{DG} \perp \overline{BC}$. Probar que:

$$m\overline{DE} + m\overline{DF} + m\overline{DG} = h.$$

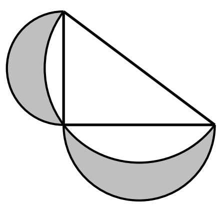
40. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 3 metros, si se cortan triángulos rectángulos isósceles en las esquinas, de longitud de cada cateto x, formándose un octógono regular, hallar el valor de x y el área del octógono.

41. Si la razón entre el apotema de un cuadrado y el apotema de un hexágono regular es $\frac{3}{4}$ y la medida del lado del cuadrado es 12 centímetros. Hallar el área del hexágono.

42. Mostrar que el área de un triángulo de lados a, b, c es igual a $\frac{abc}{4R}$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita.

43. Mostrar que el área de un triángulo es pr, donde r es el radio de la circunferencia inscrita y p es el semi-perímetro del triángulo.

44. Demostrar que la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre un triángulo rectángulo es igual al área de dicho triángulo. (ver Figura)



45. Sea P un punto en el interior del paralelogramo $ABCD$. Si se une P con los vértices del paralelogramo. Demostrar que
$$A[\triangle APB] + A[\triangle DPC] = A[\triangle BPC] + A[\triangle APD]$$

46. Los dos segmentos en queda dividida la hipotenusa de un triángulo rectángulo por el punto de contacto de la circunferencia inscrita, miden 3mt. y 2mt. Calcular el área del triángulo.

47. Construir un cuadrado que sea equivalente a la suma de dos cuadrados dados.

48. Construir un cuadrado que sea equivalente a la diferencia de dos cuadrado dados.

49. Construir un cuadrado que sea la suma de tres cuadrados dados.

50. Construir un polígono semejante a dos polígonos semejantes dados y sea equivalente a la suma de los dos polígonos dados.

51. Construir un cuadrado equivalente a un paralelogramo dado.

52. Construir un cuadrado equivalente a un triángulo dado.

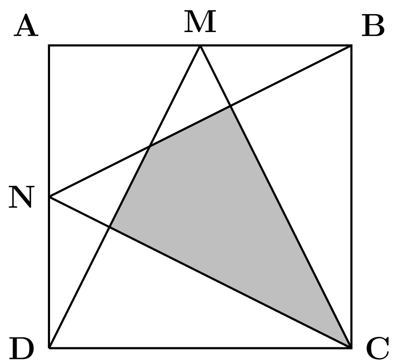
53. Construir un cuadrado equivalente a un polígono dado.

54. Construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado, conociendo:

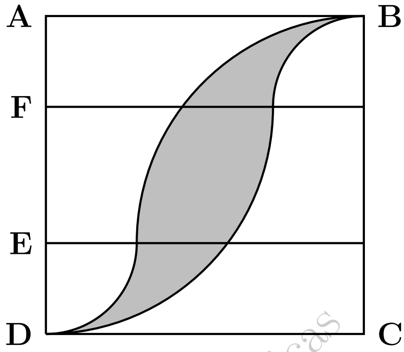
    a) la suma de la base y la altura del rectángulo;

    b) la diferencia entre la base y la altura del rectángulo.

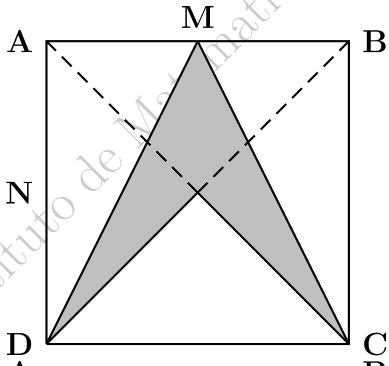
55. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado $2a$ y M es punto medio de $\overline{AB}$ y N es punto medio de $\overline{AD}$. Hallar el área sombreada.
(Rta. $\frac{16}{15}a^2$**)**



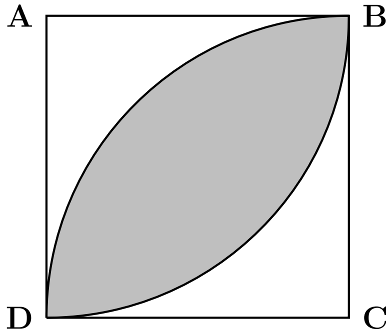
56. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado $7a$, $DE = 2a$, $EF = 3a$ y $FA = 2a$. Hallar el área sombreada.
(Rta. $\frac{21}{2}(\pi - 2)$**)**

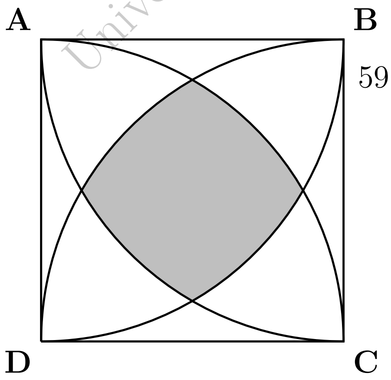


57. Si $ABCD$ es un cuadrado de lado $2a$ y M es punto medio de $\overline{AB}$. Hallar el área sombreada.

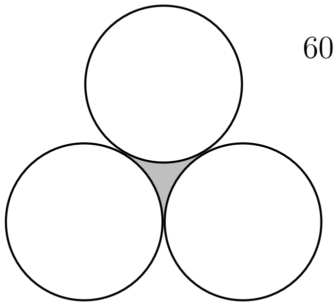


58. Si ABCD es un cuadrado de lado a. Hallar el área sombreada.

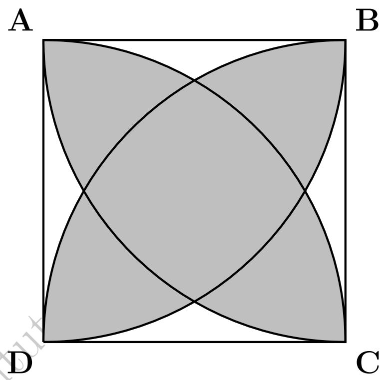




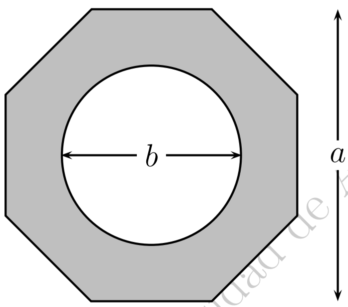
59. Si ABCD es un cuadrado de lado a. Hallar el área sombreada.
(**Rta.:** $a^2(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3})$)



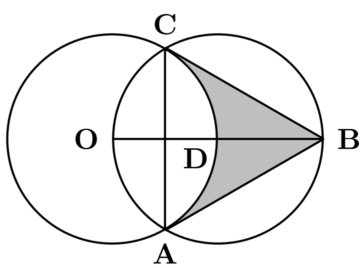
60. Las tres circunferencias tienen radio a y son tangentes exteriormente dos a dos. Hallar el área sombreada.



61. Si ABCD es un cuadrado de lado a. Hallar el área sombreada.



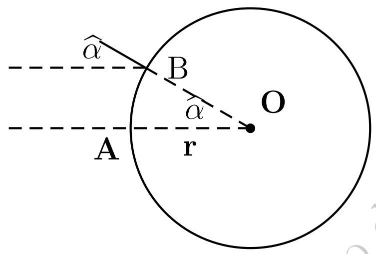
62. Hallar el área sombreada en la tuerca, en términos de a y b.
(**Rta.:** $2a^2(\sqrt{2}-1)-\frac{\pi}{4}b^2$)

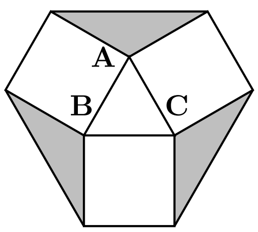


63. Las circunferencias $C(O,a)$ y $C(D,a)$ en la Figura son congruentes, $OB = 2a$, $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ son tangentes (porqué?), $D \in C(O,a)$ y $O \in C(D,a)$. Hallar el área de la región sombreada.
(**Rta.:** $a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$)

64. Eratóstenes (275 A. C.) calculó la circunferencia de la Tierra con un método ingenioso. Supuso que los rayos del Sol eran paralelos y descubrió que cuando el Sol se encontraba exactamente sobre Alejandría

(punto A en la figura), sus rayos formaban un ángulo de 7,2º con un poste vertical situado a 500 millas, en Siena (Asuán)(punto B en la figura). Además, supuso que el ángulo central α también medía 7,2º. Dedujo que la relación del ángulo central α a 500 millas sería igual a la relación del total de grados de una circunferencia para completar la longitud de la circunferencia de la Tierra. Hallar la proporción y calcula la circunferencia de la Tierra. (Rta. 3979 millas, radio real:4183 millas)





66. En la figura, el ΔABC es equilátero de lado $2a$, sobre los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se construyen cuadrados. Hallar el área de cada una de las regiones sombreadas.
(Rta.: $a^2\sqrt{3}$**)**

67. En el ΔABC, sea $M \in \overline{BC}$ y $N \in \overline{AC}$, sea $O \in \overline{AM} \cap \overline{BN}$. Si el área del ΔABO y el área del ΔAON es 7 y el área del ΔBOM es 3, hallar el área del cuadrilátero $OMCN$.
(Rta.: 18**)**

68. (Teorema de Ceva) Sea $X \in Int(\overline{BC})$, $Y \in Int(\overline{AC})$ y $Z \in Int(\overline{AB})$ en el ΔABC. La condición necesaria y suficiente para que los segmentos $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ sean concurrentes es que $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$

69. (Teorema de Menelao) Sea el ΔABC, sean X, Y y Z tres puntos distintos de los puntos A, B y C y sea $X \in \overleftrightarrow{BC}$, $Y \in \overleftrightarrow{AC}$ y $Z \in \overleftrightarrow{AB}$. La condición necesaria y suficiente para que los puntos X, Y y Z sean colineales es que $\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1$

APÉNDICE A

TEORÍA DE INVERSIÓN

A.1. Inversos de puntos en el plano

Las inversiones constituyen un tipo de trasformaciones geométricas que trasforman rectas en circunferencias y circunferencias en rectas y envian ángulos en ángulos congruentes.

Definición 74. *Dada una circunferencia $C(O,r)$ y un punto P en el plano de la circunferencia, el inverso de P con respecto a la circunferencia es un punto P' en la semirecta $\overrightarrow{OP}$ tal que*

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

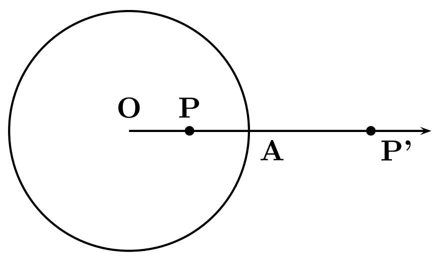


Figura 1.

La circunferencia $C(O, r)$ se le llama la circunferencia de inversión, al centro O se le llama centro de inversión y a r se le llama el radio de inversión. De la definición se observa que también P es el inverso de P' y que cada punto del plano, excepto O, tiene inverso respecto a la circunferencia y todos los puntos $A \in C(O, r)$ se transforman en si mismo, a estos puntos los llamamos puntos dobles y a $C(O, r)$ se le llama circunferencia de puntos dobles. También decimos que P y P' son homólogos bajo la inversión.

Teorema 133.

Si P es un punto exterior a la circunferencia de inversión $C(O, r)$, entonces su inverso P' es interior a la circunferencia y recíprocamente.

Demostración. En efecto, como P es exterior a la circunferencia $C(O, r)$, entonces $OP > r$, y como P' es el inverso de P, entonces $OP \cdot OP' = r^2$, luego $r \cdot OP' < r^2$ y simplicando $OP' < r$. ■

Teorema 134.

Si A y B son puntos exteriores a la circunferencia de inversión $C(O, r)$ y $OA > OB$, entonces sus inversos A' y B' son interiores a la circunferencia de inversión y $OA' < OB'$.

Demostración. Por el teorema anterior, como por hipotésis A y B son exteriores, entonces sus inversos A' y B' son interiores y por la definición de inverso

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$$

luego $OA = \frac{r^2}{OA'}$ y $OB = \frac{r^2}{OB'}$ y como por hipótesis $OA > OB$, entonces

$$\frac{r^2}{OA'} > \frac{r^2}{OB'}$$

luego $OA' < OB'$. ■

El siguiente teorema nos permite hacer la construcción con regla y compás, del inverso de un punto en el interior de la circunferencia de inversión

Teorema 135.

Sea P un punto en el interior de la circunferencia de inversión $C(O, r)$. Entonces la intercepción de las rectas tangentes a $C(O, r)$ en los extremos de la cuerda perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ en P es el inverso P' de P respecto a $C(O, r)$.

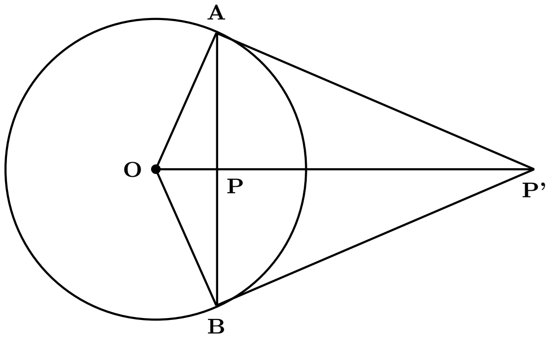


Figura 2.

Demostración. (Ver Figura 2.). Sea $\overline{AB}$ la cuerda perpendicular a $\overrightarrow{OP}$ en P y sea P' el punto de intersección de las tangentes a $C(O,r)$ en A y B. Luego P es punto medio de $\overline{AB}$ y como $\overline{AP'} \cong \overline{BP'}$ entonces el $\Delta ABP'$ es isósceles y por tanto $\overline{PP'} \perp \overline{AB}$, luego O, P, P' son colineales. Como $\overline{OA} \perp \overline{AP'}$ entonces el $\Delta OAP'$ es rectángulo con $\overline{PA} \perp \overline{OP'}$ y por el teorema de las propiedades métricas del triángulo rectángulo: $OB^2 = OP \cdot OP' = r^2$, luego P' es el inverso de P con respecto a $C(O,r)$. ■

Teorema 136.

Sea P un punto en el exterior de la circunferencia de inversión $C(O,r)$. Entonces el punto medio de la cuerda común a las circunferencias $C(O,r)$ y la de diámetro $\overline{OP}$ es el inverso del punto P con respecto a la circunferencia $C(O,r)$.

Demostración. (Ver Figura 3.). Sea $C(O,r)$ la circunferencia de inversión y sea P un punto en el exterior de la circunferencia de inversión, luego $OP > r$ y por tanto la circunferencia de diámetro OP intercepta la $C(O,r)$, sean A y B los punto de intercepción. Sea P' el punto medio de $\overline{AB}$. Veamos que P' es el inverso de P con respecto a $C(O,r)$. En efecto, como P' es punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{OP'} \perp \overline{AB}$ y como $\overline{OP}$ es diámetro, entonces $\overline{OA} \perp \overline{AP}$ y $\overline{OB} \perp \overline{BP}$ luego $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son tangentes a la $C(O,r)$ en A y B respectivamente, por lo tanto el ΔABP es isósceles y por el teorema de las propiedades del triángulo isósceles, $\overline{P'P} \perp \overline{AB}$, luego O, P', P son colineales y por el teorema de las propiedades métricas del triángulo rectángulo:

$$OP \cdot OP' = OA^2 = r^2,$$

por tanto P' es el inverso de P con respecto a la $C(O,r)$. ■

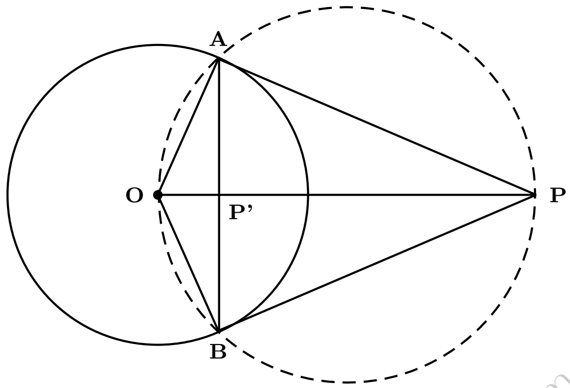


Figura 3.

A.2. Inverso de circunferencias y rectas

Veremos a continuación varios teoremas que nos dicen cuando una circunferencia se transforma en una circunferencia, cuando una circunferencia se transforma en una recta y cuando una recta se transforma en una recta.

Teorema 137.
Sea $C(O,r)$ una circunferencia de inversión y sea $C(O,R)$ una circunferencia concéntrica con la circunferencia de inversión. Entonces el lugar geométrico de los puntos inversos de la $C(O,R)$ es otra circunferencia concéntrica de radio $\frac{r^2}{R}$.

Demostración. Probemos primero que para todo punto $P \in C(O,R)$, su inverso P' esta sobre una circunferencia de centro O y radio $\frac{r^2}{R}$. Supongamos que $R < r$, entonces como P' es el inverso de P, se debe cumplir que $OP \cdot OP' = r^2$, pero $OP = R$, luego para todo P' inverso de P se cumple que $OP' = \frac{r^2}{R}$ y $OP' > r$, por lo tanto P' pertenece a una circunferencia de centro O y radio $\frac{r^2}{R} > r$.
Recíprocamente, veamos que si P' es un punto de la circunferencia de centro O y radio $\frac{r^2}{R}$ entonces su inverso es un punto $P \in C(O,R)$. En efecto, como P' es exterior a la circunferencia de inversión entonces su inverso P esta en el interior de dicha circunferencia y se debe cumplir que $OP \cdot OP' = r^2$, luego $OP = \frac{r^2}{OP'}$, pero como $OP' = \frac{r^2}{R}$, entonces, $OP = \frac{r^2}{\frac{r^2}{R}} = R$, luego $P \in C(O,R)$. ■

Teorema 138.
Sea $C(O,r)$ una circunferencia de inversión y sean $\bar{l}$ y $\bar{l}'$ las dos semirrectas en que O divide a l. Entonces el lugar geométrico de los puntos inversos de las semirrectas $\bar{l}$ y $\bar{l}'$ son $\bar{l}$ y $\bar{l}'$ respectivamente.

Demostración. (Ver Figura 4.) Si $P \in IntC(O,r)$ entonces su inverso $P' \in ExtC(O,r)$ y $P' \in \overrightarrow{OP} \equiv \bar{l}$. Recíprocamente, si $P' \in ExtC(O,r)$ entonces su inverso $P \in IntC(O,r)$ y $P \in \overrightarrow{OP'} \equiv \bar{l}$. ■

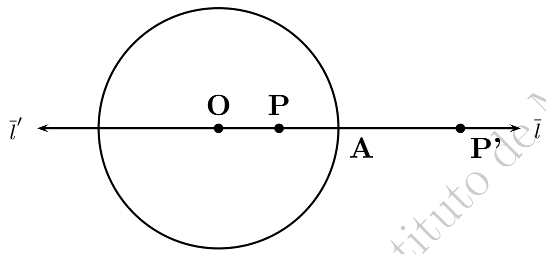


Figura 4.

Este teorema muestra que toda recta que pase por el centro de inversión se trasforma en si misma, en este caso decimos que esta figura es doble, aunque sus puntos no son dobles.

Teorema 139.
Toda circunferencia que pase por dos puntos homólogos en la inversión es doble y es ortogonal a la circunferencia de inversión. Recíprocamente, si una circunferencia es ortogonal a la circunferencia de inversión entonces es doble.

Corolario 50. *Dos pares de puntos homólogos bajo la inversión, no alineados, son cíclicos.*

Teorema 140.
Sean A, B puntos exteriores a la circunferencia de inversión $C(O,r)$ y sean A', B' los inversos de A, B respectivamente. Entonces los triángulos ΔOAB y $\Delta OA'B'$ son semejantes.

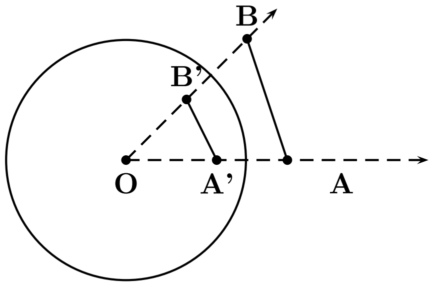


Figura 5.

Demostración. (Ver Figura 5.) Sean A, B puntos exteriores a la circunferencia de inversión $C(O, r)$ y sean A', B' sus respectivos inversos, entonces por la definición de punto inverso, se cumple que

$$OA \cdot OA' = r^2 = OB \cdot OB'$$

y por lo tanto

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$$

y como $\widehat{AOB} \cong \widehat{B'OA'}$, entonces por el criterio de semejanza P-A-P:

$$\Delta OAB \sim \Delta OA'B'.$$

Nota: de la demostración anterior se concluye que

$$\widehat{ABO} \cong \widehat{B'A'O}, \quad \widehat{BAO} \cong \widehat{A'B'O}. \qquad \blacksquare$$

Teorema 141.

Sea $C(O, r)$ la circunferencia de inversión y sea l una recta que no pasa por el centro de inversión O. Entonces el inverso de l respecto de $C(O, r)$, es una circunferencia que pasa por O. Recíprocamente, la figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión O es una recta que no pasa por O.

Demostración. (Ver Figura 6.) Sea $C(O, r)$ la circunferencia de inversión y sea l una recta tal que $O \notin l$. Sea $A \in l$ tal que $\overline{OA} \perp l$, sea A' el inverso de A respecto $C(O, r)$, por tanto $OA \cdot OA' = r^2$. Veamos que todos los puntos de la circunferencia C' de diámetro $\overline{OA'}$, excepto O son los inversos de la recta

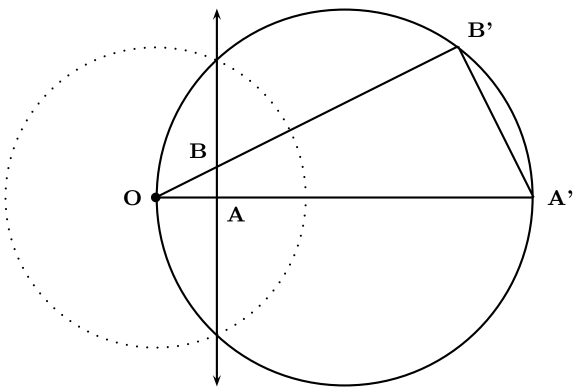


Figura 6.

l. Sea $B \in l$ y sea $B' \in \overrightarrow{OB}$ tal que B' esta en la intersección de la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ con la circunferencia C', entonces por el teorema anterior los triángulos rectángulos $\Delta OB'A'$ y ΔOAB son semejantes, por lo tanto

$$\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OB'}$$

luego $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$, luego B' que pertenece a la circunferencia C', es el inverso de B, con $B \in l$.
Recíprocamente, si $B' \neq O$ es un punto de la circunferencia C', veamos que su inverso esta en la recta l. Sea $\{B\} = l \cap \overrightarrow{OB'}$, veamos que B es el inverso de B' respecto de $C(O, r)$. En efecto, como los triángulos $\Delta OB'A'$ y ΔOAB son rectángulos y tienen un ángulo común, entonces son semejantes, por tanto:

$$\frac{OB'}{OA} = \frac{OA'}{OB},$$

es decir, $OB \cdot OB' = OA \cdot OA' = r^2$, luego B es el inverso de B' con respecto a $C(O; r)$. ■

Teorema 142.

Si una recta es exterior a la circunferencia de inversión $C(O, r)$, entonces su inversa es una circunferencia que pasa por O y es interior a la circunferencia de inversión.

Demostración. Sea l una recta exterior a la circunferencia de inversión $C(O, r)$, por tanto, todos los puntos de l son exteriores a la circunferencia de inversión $C(O, r)$ y por teorema anterior, sus inversos son interiores a la circunferencia de inversión y como el inverso de una recta que no pasa por O es una circunferencia que pasa por O, entonces la inversa de l es una circunferencia que esta en el interior de la circunferencia de inversión $C(O, r)$. ■

BIBLIOGRAFÍA

[1] Guerrero G. Ana Berenice. *Geometría: desarrollo axiomático*, primera edición ECOE Ediciones (2006).

[2] Clemens, S.R. *Geometría*, Primera edición. Addison-Wesley Longman, México 1998.

[3] Alvarez E. *Elementos de Geometría con numerosos ejercicios y geometría del compás*, primera edición. Universidad de Medellín. Medellín 2000.

[4] Moise, Edwin E *Elementos de Geometría Superior* , Centro Regional de Ayuda Técnica (A.I.D.).

[5] Villegas, Celia y Valencia, Santiago *Geometría Euclidiana*, Universidad Nacional.1988

[6] Adan P., Puig *Curso de Geometría Métrica*,dos tomos, sexta edición. Madrid. 1958.

[7] Hemerling, Edwin *Geometría Elemental* , Limusa Wiley.

ÍNDICE ALFABÉTICO